



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)*

Présentée et soutenue le 15/03/2019 par :

JULIEN LESOUPLE

**Estimation Parcimonieuse de Biais Multitrajets pour les Systèmes
GNSS**

JURY

| | | |
|----------------------|---|-----------------------|
| FRANÇOIS DESBOUVRIES | Professeur, Télécom SudParis | Président du jury |
| SYLVIE LE HEGARAT | Professeur, Université Paris Sud | Rapporteur |
| FRANÇOIS LE GLAND | Directeur de recherche, l'INRIA | Rapporteur |
| JULIETTE MARAIS | Chargée de recherche, l'IFSTTAR | Examineur |
| MARC POLLINA | Ingénieur de recherche, M3 Systems | Examineur |
| THIERRY ROBERT | Ingénieur de recherche, CNES | Examineur |
| MARCUS CARLSSON | Maître de conférences, Université de Lund | Invité |
| STEPHEN McLAUGHLIN | Professeur, Université d'Heriot Watt | Invité |
| JEAN-YVES TOURNERET | Professeur, Université de Toulouse | Directeur de thèse |
| FRANÇOIS VINCENT | Professeur, Université de Toulouse | Co-directeur de thèse |

École doctorale et spécialité :

MITT : Informatique et Télécommunications

Unité de Recherche :

Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (UMR 5505)

Directeur(s) de Thèse :

Jean-Yves TOURNERET et François VINCENT

Rapporteurs :

Sylvie LE HEGARAT-MASCLE et François LE GLAND

Remerciements

21 mars 2019. Sûrement mes dernières heures à ce bureau, et l'heure de me livrer aux célèbres, mais redoutables, remerciements. Célèbres, car cette partie sera sûrement la plus lue de ce manuscrit, redoutables, car il ne me faut oublier personne.

Je tiens en premier lieu à remercier toutes les (nombreuses) personnes ayant rendu cette thèse possible, notamment les partenaires “industriels”, le CNES et M3 Systems. Plus particulièrement côté CNES, je tiens à remercier Lionel Ries, qui a participé à l'élaboration du sujet, Thierry Robert, qui a toujours su montrer beaucoup d'intérêt dans mes recherches, et Franck Barbiero, qui en plus de son enthousiasme pour mes travaux a toujours été disponible sur plein d'aspects. Merci pour tout Franck. Côté M3 Systems, je remercie Willy Vigneau qui a toujours eu confiance en nos propositions, ce qui nous a permis d'explorer différentes pistes, parfois éloignées du sujet initial. Je remercie aussi Frédéric Faurie, qui nous a suggéré cette fameuse méthode Danoise qui a suscité tant de réactions, et aussi Nabil Jardak et Marc Pollina pour leurs temps et intérêts. Je remercie également mes encadrants académiques, Toulouse INP et l'ISAE Supaero, représentés par mes directeurs de thèse. Côté ISAE, je remercie Mohamed Sahmoudi, présent une grande partie de la thèse, et François Vincent, qui a accepté de reprendre la thèse alors qu'elle était déjà bien aboutie. Malgré cela, François a toujours été pertinent dans ses remarques et commentaires, notamment sur la rédaction de ce manuscrit et la présentation de la soutenance. Merci beaucoup François. Finalement côté INP, je tiens à remercier celui qui a toujours été là, du début jusqu'à la fin de la thèse, Jean-Yves Tourneret. Jean-Yves m'a toujours encouragé et a toujours su me motiver, même dans les moments les plus difficiles. De plus, il a su donner une dimension humaine à cette thèse, en me proposant notamment cet échange en Colombie, en m'accompagnant aux différentes conférences dans lesquelles nous avons publiés, ou en me présentant de nombreuses personnes avec qui j'ai pu échanger sur mes travaux (Herwig, Thomas, Adrian, Marcus, Henry, Paul, ...). Merci pour tout Jean-Yves, j'espère très sincèrement qu'on se reverra dans l'avenir, dans un cadre professionnel ou non (au *Solides* pourquoi pas :-)).

Je remercie Sylvie Le Hégarat et François Le Gland pour avoir rapporté ma thèse et pour avoir soulevé des points intéressants à côté desquels j'étais passé, ainsi que François Desbouvries pour avoir présidé le jury, Juliette Marais pour sa participation, et Marcus Carlsson et Stephen McLaughlin pour avoir accepté l'invitation.

Ma vie lors de ces trois années a été partagée (à part non égales) entre deux laboratoires : l'ISAE et le TéSA. En premier lieu, je tiens à remercier les personnels de l'ISAE, dont Florian Simatos, pour m'avoir fait confiance et laissé donner des vacances en probabilités et statistiques, et Stéphanie Bidon, qui me suit depuis ma deuxième année d'ENSICA, et qui m'a fait confiance pour les vacances en traitement du signal aléatoire. Lors de mes venues à l'ISAE, j'ai partagé du temps avec les membres du DEOS/SCAN, notamment Gaël Pages et Raghuveer Kasaraneni, dont certains doctorants que je remercie pour leur (agréable) compagnie : Nabil, Marie, Vincent, Antoine et Maherizio.

Je tiens évidemment à remercier toutes les personnes que j'ai croisées à TêSA, et qui m'ont appris la vraie définition d'une pause café (2 fois par jour) : Corinne (où le rose a des reflets ... violets ? :-)), Isa, Raoul (ne m'oublie pas pour la crémaillère), Philippe (prochain concert quand tu veux), Patrice (la fine mousse dans l'épaisse porte), David, Serge, Jacques, Bernard, Antoine, Romain, Charlu, Simone (t'es le prochain ;)), Adrien (que j'avais réussi à éviter après la prépa mais qui m'a retrouvé), Barbara, Lorenzo (souffle ...), Quentin, Selma, Oumaima, Amal, Hector, Jorge, Jean-Adrien et Fábio (j'espère n'avoir oublié personne, dans le cas contraire je m'en excuse platement). Ah si ! J'ai également une pensée pour les différents stagiaires, et aussi Tatiana et Nelson, que j'ai pu rencontrer à Bucaramanga, et qui sont venus nous voir à Toulouse. Mais non, évidemment, je n'oublie pas ma *bromance* professionnelle, mon cluclu, mon flingueur, mon compagnon du "tu buffu ?", "kestuf ?" et autres bizarreries linguistiques qui en ont étonné plus d'un : Sylvain <3. Continuez tous comme ça, c'était un vrai bonheur de partager mes journées avec vous, et c'est non sans un pincement au cœur que je quitte le laboratoire. Ne criez pas victoire trop tôt, je compte quand même revenir vous voir de temps en temps !

Je remercie tous ceux qui étaient extérieurs à cette thèse et qui m'ont toujours soutenu, notamment le docteur Landiou Landier, pour ses précieux conseils en organisation et en houblon. Merci évidemment aux autres amateurs de cultures, de jeux intelligents et de boissons épicées, j'ai nommé, entre autres, mes bons vieux colocs Philou, Clément, Lucien, Valou et le multi-instrumentiste Pikey de la dernière camphre, le docteur Hoa Phan (merci pour les tampons !), Stefan, Mignon, Eneko, Paul, Fred, Chivers, Billou, Marine, Mathilde, Erlé, Emilie, Adèle, Marie, et bien sûr le fameux docteur Camphre. Merci à tous les Fontvieillois : Franck (mon frère), Julien, Zaza, Momo, Funz, Caro, Antho et les cousins Gaël, Anaïs et Lucie. Très grosses pensées pour Anne-Charlotte qui aurait été derrière moi aussi. Merci également à tous les Toulousains : Germain, Lise, France, Camille, Lily, Virginie, Pierre, Julie, Anaïs, Nico, Tito (*arrivederci*), Matthieu, Fanch, Stef, Mika (et tous ceux qu'on peut croiser au Chanpagne de manière plus ou moins régulière), Tom (futur confrère :p), Laëtitia, Didier et Stef (encore félicitations, docteur :)), Ben et Seb (impossible pour moi de dissocier vos prénoms). J'ai aussi une pensée particulière pour Joe et Tim. Merci de m'avoir appris à avoir confiance en moi, à me lâcher et m'exprimer en public. J'ai eu besoin de vous pour y arriver, et c'est une des choses que j'apprécie le plus au monde. J'espère que vous finirez par trouver ce que vous cherchez. Merci à Loïc pour sa légèreté (c'est vraiment pas une critique), et le sentiment de symbiose qu'il me procure lorsqu'on se retrouve tous les deux enfermés dans la même pièce, avec ou sans bière (ce n'est pas ce que tu crois, Patrice).

J'ai une pensée très amicale pour Jean-Yves et Lisette Couleau ainsi que Jacques et Annie Maillet.

Je remercie évidemment ma famille, peu nombreuse, mais très soudée, qui m'a toujours encouragé. Ceux qui n'ont pas pu venir à ma soutenance : Dédée, Mathilde, Lise et Fanny, Danièle et Claude, Marc et Isabelle, Corinne, et ceux qui ont pu faire le voyage jusqu'à Toulouse : Annie, Jean-Pierre et Florent (merci encore pour la très belle surprise). Merci à Vincent, qui a suivi tout ça à plus de 9000km, et pour tout ton parcours, 축하해, 내 동생 (c'est un vieux copié/collé, mais le cœur y est). Merci finalement à Papa et Maman, pour avoir toujours cru en moi, m'avoir toujours soutenu et accompagné dans mes décisions, et de ne m'avoir jamais empêché de rêver. Tout ça c'est grâce à vous, vous êtes formidables.

Mes derniers mots ne vont pas à ma famille, mais à ce qui, je le souhaite plus que tout, le deviendra un jour. Merci Léa d'être là depuis bientôt 5 ans, de m'avoir supporté durant ces 3 années (surtout la dernière partie qui en avait le plus besoin) et d'apporter à mon quotidien ce rayon de lumière, si singulier, que tu es la seule à pouvoir le faire.

Je vous aime tous. Aimez-vous tous.

Résumé

L'évolution des technologies électroniques (miniaturisation, diminution des coûts) a permis aux GNSS (systèmes de navigation par satellites) d'être de plus en plus accessibles et donc utilisés au quotidien, par exemple par le biais d'un smartphone, ou de récepteurs disponibles dans le commerce à des prix raisonnables (récepteurs bas-coûts). Ces récepteurs fournissent à l'utilisateur plusieurs informations, comme par exemple sa position et sa vitesse, ainsi que des mesures des temps de propagation entre le récepteur et les satellites visibles entre autres. Ces récepteurs sont donc devenus très répandus pour les utilisateurs souhaitant évaluer des techniques de positionnement sans développer tout le hardware nécessaire.

Les signaux issus des satellites GNSS sont perturbés par de nombreuses sources d'erreurs entre le moment où ils sont traités par le récepteurs pour estimer la mesure correspondante. Il est donc nécessaire de compenser chacune de ces erreurs afin de fournir à l'utilisateur la meilleure position possible. Une des sources d'erreurs recevant beaucoup d'intérêt, est le phénomène de réflexion des différents signaux sur les éventuels obstacles de la scène dans laquelle se trouve l'utilisateur, appelé multitrajets. L'objectif de cette thèse est de proposer des algorithmes permettant de limiter l'effet des multitrajets sur les mesures GNSS.

La première idée développée dans cette thèse est de supposer que ces signaux multitrajets donnent naissance à des biais additifs parcimonieux. Cette hypothèse de parcimonie permet d'estimer ces biais à l'aide de méthodes efficaces comme le problème LASSO. Plusieurs variantes ont été développées autour de cette hypothèse visant à contraindre le nombre de satellites ne souffrant pas de multitrajet comme non nul. La deuxième idée explorée dans cette thèse est une technique d'estimation des erreurs de mesure GNSS à partir d'une solution de référence, qui suppose que les erreurs dues aux multitrajets peuvent se modéliser à l'aide de mélanges de Gaussiennes ou de modèles de Markov cachés. Deux méthodes de positionnement adaptées à ces modèles sont étudiées pour la navigation GNSS.

Abstract

The evolution of electronic technologies (miniaturization, price decreasing) allowed Global Navigation Satellite Systems (GNSS) to be used in our everyday life, through a smartphone for instance, or through receivers available in the market at reasonable prices (low cost receivers). Those receivers provide the user with many information, such as his position or velocity, but also measurements such as propagation delays of the signals emitted by the satellites and processed by the receiver. These receivers are thus widespread for users who want to challenge positioning techniques without developing the whole product.

GNSS signals are affected by many error sources between the moment they are emitted and the moment they are processed by the receiver to compute the measurements. It is then necessary to mitigate each of these error sources to provide the user the most accurate solution. One of the most intense research topic in navigation is the phenomenon of reflexions on the eventual obstacles in the scene the receiver is located in, called multipath. The aim of this thesis is to propose algorithms allowing the effects of multipath on GNSS measurements to be reduced.

The first idea presented in this thesis is to assume these multipath lead to sparse additive biases. This hypothesis allows us to estimate this biases thanks to efficient methods such as the LASSO problem. The second idea explored in this thesis is an estimation method of GNSS measurement errors corresponding to the proposed navigation algorithm thanks to a reference trajectory, which assumes these errors can be modelled by Gaussian mixtures or Hidden Markov Models. Two filtering methods corresponding to these two models are studied for GNSS navigation.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Remerciements | iii |
| Résumé | v |
| Abstract | vii |
| Table des matières | ix |
| Liste des acronymes | xi |
| Liste des notations | xiii |
| Liste des figures | xix |
| Liste des tableaux | xxv |
| Introduction | 1 |
| 1 La navigation par satellites | 5 |
| 1.1 Introduction | 6 |
| 1.2 Les systèmes de positionnement | 6 |
| 1.3 Positionnement | 21 |
| 1.4 Correction des sources d'erreurs | 27 |
| 1.5 Les indicateurs de qualité | 31 |
| 1.6 Estimation de l'état | 33 |
| 1.7 Résumé de l'algorithme de positionnement de référence | 39 |
| 2 Estimation parcimonieuse | 41 |
| 2.1 Introduction | 42 |
| 2.2 L'estimation parcimonieuse | 42 |
| 2.3 Application à l'estimation des multitrajets en GNSS | 46 |
| 2.4 Résultats expérimentaux | 56 |
| 2.5 Conclusion | 76 |
| 3 Estimation Bayésienne des hyperparamètres | 79 |
| 3.1 Introduction | 80 |
| 3.2 Estimation Bayésienne | 80 |
| 3.3 Estimation parcimonieuse des biais multitrajets | 82 |
| 3.4 Expérimentations | 88 |
| 3.5 Conclusion | 101 |

| | |
|--|------------|
| 4 Mélanges de Gaussiennes | 103 |
| 4.1 Introduction | 104 |
| 4.2 Mélanges de Gaussiennes simples | 104 |
| 4.3 Modèles de Markov cachés | 116 |
| 4.4 Méthodes de filtrage | 120 |
| 4.5 Expérimentations | 120 |
| 4.6 Conclusion | 125 |
| Conclusion et perspectives | 127 |
| A Annexes du Chapitre 1 | 131 |
| A.1 Calcul de l'état du satellite par éphémérides | 131 |
| A.2 Calcul de la latitude, de la longitude et de l'altitude | 133 |
| A.3 Calcul des angles d'azimut et d'élévation | 134 |
| A.4 L'effet Doppler | 134 |
| A.5 Modèle de Klobuchar pour le délai ionosphérique | 137 |
| A.6 Estimation de l'erreur due à la troposphère | 138 |
| B Annexes du Chapitre 2 | 143 |
| B.1 Autres campagnes de mesure | 143 |
| B.2 Exemple de biais multitrajet pour un discriminateur double delta | 146 |
| C Annexes du Chapitre 3 | 157 |
| C.1 Amélioration de la détection des multitrajets | 157 |
| C.2 Expérimentations | 165 |
| D Annexes du Chapitre 4 | 173 |
| D.1 Estimation de densités | 173 |
| D.2 Méthodes de filtrage associées | 177 |
| Bibliographie | 183 |

Liste des acronymes

- AGC** contrôle automatique de gain, ou *Automatic Gain Control*. 11
- ANC** convertisseur analogique numérique, ou *Analogic to Numeric Converter*. 11
- BOC** *Binary Offset Carrier*. 7
- BPSK** modulation de phase à deux états, ou *Binary Phase Shift Keying*. 7, 18
- C/A** code civil, ou *Coarse Acquisition*. 7–9, 12, 15, 18
- CBOC** modulation à décalage de porteuse à deux états composite, ou *Composite Binary Offset Carrier*. 18
- CDF** fonctions de répartition, ou *Cumulative Distribution Function*. 61, 62, 64, 67, 69, 71, 101, 121
- CDMA** accès multiple par répartition de code, ou *Code Division Multiple Access*. 7, 19
- CS** *Commercial Service*. 18
- DLL** boucle à verrouillage de délai, ou *Delay Lock Loop*. xix, 14–17, 31
- DOP** dilution de précision, ou *Dilution Of Precision*. 32, 34, 128
- ECEF** repère géocentrique, Terre fixe, ou *Earth Centered Earth Fixed*. xix, 22, 28, 132–134
- ECI** repère géocentrique inertiel, ou *Earth Centered Inertial*. 22, 28, 132, 133
- EGNOS** *European Geostationary Navigation Overlay Service*. 20
- EKF** filtre de Kalman étendu, ou *Extended Kalman Filter*. 38, 89, 100, 101
- EM** *Expectation Maximization*. 105, 106, 117, 174, 175
- ENU** repère local est, nord, haut, ou *East North Up*. xix, 22, 32, 34, 57, 58, 61, 134
- FDMA** accès multiple par répartition en fréquence, ou *Frequency Division Multiple Access*. 19
- FLL** boucle à verrouillage de fréquence, ou *Frequency Lock Loop*. xix, 14, 16, 17, 31
- GAGAN** *GPS Aided Geo Augmented Navigation*. 20
- GBAS** systèmes terrestres d'augmentation, ou *Ground Based Augmentation Systems*. 20
- GCS** segment sol de contrôle Galileo, ou *Ground Control Segment*. 18
- GEO** orbite géostationnaire. 20
- GLONASS** *Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema*. 6, 19, 20
- GMS** segment sol de mission Galileo, ou *Ground Mission Segment*. 18
- GNSS** systèmes de navigation par satellites, ou *Global Navigation Satellite System*. xx, 1–3, 6, 7, 20, 22, 24–31, 35, 46, 55, 76, 104, 105, 110, 127, 128, 137
- GPS** *Global Positioning System*. xix, 6–10, 14, 18–20, 25, 29, 36, 58, 60

- HMM** modèles de Markov cachés, ou *Hidden Markov Model*. 2, 3, 116, 117, 120, 123, 127, 128, 175
- HOW** mot handover, ou *HandOver Word*. 7
- HRC** corrélateur haute résolution, ou *High Resolution Correlator*. 15
- i.i.d.** indépendantes et identiquement distribuées. 105, 173
- IMM** *Interacting Multiple Model*. 120, 179
- LASSO** *Least Absolute Shrinkage Operator*. 43, 46, 47, 50–52, 57, 83, 157
- LNA** amplificateur faible bruit, ou *Low Noise Amplifier*. 10
- LOS** signal direct, ou *Line Of Sight*. xx, 25
- MAP** Maximum A Posteriori. 81, 102, 164, 179, 181
- MCMC** Monte-Carlo par chaînes de Markov, ou *Markov chain Monte Carlo*. 2, 81, 87, 102, 125, 127–129
- MEO** orbite terrestre moyenne, ou *Middle Earth Orbit*. 6, 18, 20
- MMSE** minimum d’erreur quadratique moyenne, ou *Minimum Mean Square Error*. 81, 87, 102, 164
- NCO** oscillateur contrôlé par entrée numérique, ou *Numerically Controled Oscillator*. 14–17
- NED** repère local nord, est, bas, ou *North East Down*. 22
- NLOS** signal indirect, ou *Non Line Of Sight*. xx, 25
- OS** *Open Service*. 18
- P** code militaire, ou *Precise*. 7–9
- pdf** fonction densité de probabilité, ou *Probability Density Function*. 81, 83, 84, 87, 173
- PLL** boucle à verrouillage de phase, ou *Phase Lock Loop*. 14, 17, 31
- PPS** *Precise Positioning System*. 6, 7
- PRN** bruit pseudo-aléatoire, ou *Pseudo Random Noise*. xix, 7, 8
- PRS** *Public Regulated Service*. 18
- PSRF** *Potential Scale Reduction Factor*. 88, 165
- PVT** Position Vitesse Temps, ou *Position Velocity Time*. 10
- QZSS** *Quasi-Zenith Satellite System*. 20
- RAIM** contrôle d’intégrité autonome du récepteur, ou *Receiver Autonomous Integrity Monitoring*. 30
- RMSE** erreur quadratique moyenne, ou *Root Mean Square Error*. 57, 58, 61
- SA** *Selective Availability*. 6, 18
- SAR** *Search And Rescue*. 18
- SBAS** systèmes satellitaires d’augmentation, ou *Satellite Based Augmentation Systems*. 6, 20, 29
- SPS** *Standard Positioning System*. 6, 7, 18
- TLM** mot de télémétrie, ou *TeLeMetry word*. 7
- TT&C** télémétrie, poursuite et contrôle, ou *Telemetry, Tracking and Control*. 18, 19
- UERE** erreur de distance équivalente utilisateur, ou *User Equivalent Range Error*. 35, 110, 128
- WAAS** *Wide Area Augmentation System*. 20

Liste des notations

- $A_c(t)$ Amplitude d'émission de référence des satellites GPS sur la fréquence L_1 pour le code C/A à la date t . 8
- A_i Amplitude de réception du signal émis par le satellite i sur la fréquence L_1 . 9–12, 117–120, 175, 176, 179–181
- \mathbf{a}_i vecteur unitaire allant du récepteur vers le satellite i . 22–24, 27, 28, 33, 34, 134, 135, 137
- \mathbf{a}_k vecteur des hyperparamètres des lois exponentielles pour les variables $\tau_{i,k}^2$. 164
- $A_p(t)$ Amplitude d'émission de référence des satellites GPS sur la fréquence L_1 pour le code P à la date t . 8
- b biais géométrique d'horloge du récepteur. 26, 27, 31, 33, 34, 92, 96, 98, 104, 105, 157–159, 162–165
- $\mathcal{B}e(p; \alpha, \beta)$ loi beta en p de paramètres α et β . 162
- $\mathcal{B}(b; p)$ loi de Bernoulli en b de paramètre p . 157
- \dot{b} dérive géométrique d'horloge du récepteur. 27, 31, 33, 34, 92, 96, 98, 104, 105
- c célérité de la lumière dans le vide ($c = 299792458\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$). 9, 23, 26, 28, 131, 135, 136, 138
- $\#$ cardinal (nombre d'éléments) d'un ensemble. 42
- c_i Code C/A du satellite i . 8–12
- \mathbf{C}_{ie} matrice de rotation pour le satellite i , permettant de passer du repère ECEF au repère ECI. 28, 40, 132
- $c_{i,k}$ variable indiquant dans quel état se trouve de la mesure i à l'instant k . 117, 120, 173–181
- \mathbf{c}_k vecteur des variables indiquant dans quel état se trouve de les mesures à l'instant k . 120, 177–179
- C/N_0 rapport porteuse sur densité de bruit (*Carrier-to-Noise Density Ratio*), en dBHz. 2, 30, 31, 47–51, 57, 61, 62, 104, 127, 165, 168
- D_c sortie du discriminateur *cross*. 17
- D_{EL} sortie du discriminateur avance retard normalisé. 16
- Δf_i décalage fréquentiel du signal reçu par le récepteur émis par le satellite i par rapport à la fréquence intermédiaire f_{IF} . 11, 12, 14, 15, 17, 21–24, 27, 29, 137
- $\Delta\tau_i$ variation du temps de propagation du signal reçu par le récepteur émis par le satellite i . 16
- $\delta t_{\text{bruit},i}$ erreur de propagation due au bruit de mesure sur le signal du satellite i . 25, 26
- $\delta t_{\text{eph},i}$ retard de propagation dû aux erreurs d'éphémérides du satellite i . 24, 26
- $\delta t_{\text{iono},i}$ retard de propagation dû à l'ionosphère sur le signal du satellite i . 24, 26
- $\hat{\delta t}_{\text{iono},i}$ estimation du retard de propagation dû à l'ionosphère sur le signal du satellite i .

- Δt_{k-1} laps de temps entre les instants $k-1$ et k . 36
- $\delta t_{\mathbf{MP},i}$ erreur de propagation due aux éventuels multitrajets (*MultiPath*) sur le signal du satellite i . 25, 26
- δt_p biais temporel de propagation entre le satellite et le récepteur. 26
- δt_R biais temporel d'horloge récepteur. 25, 26
- $\delta t_{\mathbf{rel},i}$ retard de propagation dû aux effets relativistes du satellite i . 24–26
- δt_{S_i} biais temporel d'horloge du satellite i . 24–26
- $\delta t_{\mathbf{tropo},i}$ retard de propagation dû à la troposphère sur le signal du satellite i . 24, 26
- $\hat{\delta t}_{\mathbf{tropo},i}$ estimation du retard de propagation dû à la troposphère sur le signal du satellite i . 141
- d_i distance géométrique entre le satellite i et le récepteur. 23, 26–28, 135
- \mathbf{D} matrice de pondération pour l'estimation robuste. 55, 56
- E réplique avancée dans le temps du signal (*Early*). 14–16, 84
- $\varepsilon_{\mathbf{eph},i}$ erreur de pseudodistance due aux erreurs d'éphémérides du satellite i . 26, 27
- $\varepsilon_{n,i}$ erreur de pseudodistance due au bruit de mesure sur le signal du satellite i . 26, 27, 33
- $\dot{\varepsilon}_{n,i}$ erreur de pseudovitesse due au bruit de mesure sur le signal du satellite i . 27, 33, 34
- $\varepsilon_{\mathbf{iono},i}$ erreur de pseudodistance due à l'ionosphère sur le signal du satellite i . 26, 27, 31
- $\hat{\varepsilon}_{\mathbf{iono},i}$ estimation de l'erreur de pseudodistance due à l'ionosphère sur le signal du satellite i . 29, 138
- $\dot{\varepsilon}_{\mathbf{eph},i}$ erreur de pseudovitesse due aux erreurs d'éphémérides du satellite i . 27
- $\dot{\varepsilon}_{\mathbf{iono},i}$ erreur de pseudovitesse due à l'ionosphère sur le signal du satellite i . 27, 31
- $\hat{\dot{\varepsilon}}_{\mathbf{iono},i}$ estimation de l'erreur de pseudovitesse due à l'ionosphère sur le signal du satellite i . 29, 138
- $\dot{\varepsilon}_{\mathbf{rel},i}$ erreur de pseudovitesse due aux effets relativistes du satellite i . 27
- $\hat{\dot{\varepsilon}}_{\mathbf{rel},i}$ estimation de l'erreur de pseudovitesse due aux effets relativistes du satellite i . 28
- $\dot{\varepsilon}_{\mathbf{tropo},i}$ erreur de pseudovitesse due à la troposphère sur le signal du satellite i . 27, 31
- $\hat{\dot{\varepsilon}}_{\mathbf{tropo},i}$ estimation de l'erreur de pseudovitesse due à la troposphère sur le signal du satellite i . 29, 141
- $\dot{\varepsilon}_{t_i}$ erreur de pseudovitesse due au biais d'horloge du satellite i . 27
- $\hat{\dot{\varepsilon}}_{t_i}$ estimation de l'erreur de pseudovitesse due au biais d'horloge du satellite i . 28
- $\varepsilon_{\mathbf{rel},i}$ erreur de pseudodistance due aux effets relativistes du satellite i . 26, 27
- $\hat{\varepsilon}_{\mathbf{rel},i}$ estimation de l'erreur de pseudodistance due aux effets relativistes du satellite i . 28
- $\varepsilon_{\mathbf{tropo},i}$ erreur de pseudodistance due à la troposphère sur le signal du satellite i . 26, 27, 31
- $\hat{\varepsilon}_{\mathbf{tropo},i}$ estimation de l'erreur de pseudodistance due à la troposphère sur le signal du satellite i . 29, 141
- ε_{t_i} erreur de pseudodistance due au biais d'horloge du satellite i . 26, 27
- $\hat{\varepsilon}_{t_i}$ estimation de l'erreur de pseudodistance due au biais d'horloge du satellite i . 28
- \mathbf{F} matrice de transition de l'état. 36, 37, 39, 47, 82, 83, 120, 177–180
- f_i fréquence du signal reçu par le récepteur émis par le satellite i . 9–11
- $f_{\mathbf{IF}}$ fréquence intermédiaire après traitement préliminaire du signal reçu (*Intermediate Frequency*). 10, 11
- $f_{\mathcal{N}}$ fonction densité de probabilité de la loi normale. 105, 110, 173–181

- f_s fréquence d'échantillonnage du récepteur. 11
- \mathbf{G} matrice de géométrie du problème de la navigation. 34
- $\mathcal{G}(a; \alpha, \beta)$ loi gamma en a de paramètres α et β . 87
- $\mathcal{GIG}(x; p, a, b)$ loi inverse Gaussienne généralisée en x de paramètres p, a et b . 86
- \mathbf{H} matrice du problème de filtrage de l'état. 34, 35, 37–40, 47, 50–52, 55, 56, 82, 83, 85–87, 100, 159, 160, 165, 178, 180
- $\mathbf{h}_{i,k}$ i -ème ligne la matrice \mathbf{H}_k . 160, 161, 164
- $\tilde{\mathbf{H}}_k$ matrice de projection sur l'orthogonal de $\text{Vec}(\mathbf{H}_k)$ pondérée. 51, 52
- I point de corrélation en phase (*In phase*) de la FLL. 16, 17
- $\mathcal{IN}(x; \mu, \lambda)$ loi inverse Gaussienne en x de paramètres μ et λ . 86
- \mathbf{K} matrice de gain du filtre de Kalman. 38, 39, 87, 162, 178, 180
- k instant à laquelle la variable est prise. 36–40, 47–57, 76, 80, 82–89, 92, 96–101, 104, 105, 110, 117–121, 157–165, 168, 170, 173, 177–181
- L réplique retardée dans le temps du signal (*Late*). 14–16
- L_1 Fréquence porteuse GPS, $L_1 = 1575,42$ MHz. xix, 7–10, 19, 23
- L_2 Fréquence porteuse GPS, $L_2 = 1227,6$ MHz. 7
- L_5 Fréquence porteuse GPS, $L_5 = 1176,45$ MHz. 7
- λ hyperparamètre du problème de navigation avec estimation parcimonieuse des multitrajets. 47, 48, 50–55, 57, 76, 80, 83–89, 92, 97, 99–101, 157–160, 162–164
- λ_{L_1} longueur d'onde de la fréquence L_1 ($\approx 19\text{cm}$). 23, 27, 35, 137
- $\mathcal{L}(m; \mu, \sigma)$ loi de Laplace en m de paramètres μ, σ . 83, 85–87
- \mathbf{m} vecteur de biais multitrajet. 47, 50–52, 76, 82–88, 100, 155, 157–159, 162–165, 168
- m_i erreur de pseudodistance due aux éventuels multitrajets sur le signal du satellite i . 26, 27
- \dot{m}_i erreur de pseudovitesse due aux éventuels multitrajets sur le signal du satellite i . 27
- $\mathcal{N}(\mathbf{n}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})$ loi normale en \mathbf{n} de vecteur moyen $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\sigma}$. 35
- \mathbf{n} vecteur de bruit de mesure du problème de la navigation. 34, 37, 47, 82, 83, 104, 120, 177, 179
- $\boldsymbol{\nu}_i$ bruits de la i -ème mesure relative à un satellite de référence sur toute la campagne de mesure. 105, 173–176
- $\nu_{i,k}$ bruits de la i -ème mesure relative à un satellite de référence à l'instant k . 105, 110, 117, 173–175, 177
- $\boldsymbol{\nu}_k$ vecteur des bruits de mesures relatifs à un satellite de référence à l'instant k . 104
- $\boldsymbol{\Omega}_{ie}$ matrice de vitesse angulaire du repère ECEF. 28, 40, 133
- \oplus OU exclusif (équivalent à l'addition modulo 2). 8
- \mathbf{Q} matrice de covariance du bruit d'état. 36–40, 47, 83, 85, 87, 159, 162, 165, 177–180
- p_k hyperparamètre de la loi de Bernoulli associée aux biais multitrajets à l'instant k . 157–164
- ϕ_i déphasage du signal reçu par le récepteur émis par le satellite i . 9–12, 14, 15, 17
- P_i Code P du satellite i . 8
- $\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{H}_k}$ matrice de projection sur le sous espace engendré par la matrice \mathbf{H}_k . 50, 51

- Π_i vecteur des probabilités initiales de la i -ème mesure. 117–120, 175, 176, 179
- \mathbf{p}_k vecteur des hyperparamètres des lois de Bernoulli pour le vecteur \mathbf{b}_k . 164
- P réplique du signal (*Prompt*). 14–16
- ψ_i angle d'azimut du satellite i . 22, 31, 134, 137
- q_i Message de navigation du satellite i . 8
- Q point de corrélation en quadrature (*Quadrature*) de la FLL. 16, 17
- \mathbf{R} matrice de covariance du bruit de mesure \mathbf{y} . 34, 35, 37–39, 47, 55, 56, 76, 83, 85–88, 100, 159, 178, 180
- \mathbf{r} position du récepteur. 23, 24, 27, 28, 33, 34, 92, 96, 98, 104, 105, 135
- R_c rythme chip du code C/A, $R_c = 1,023$ MHz. xix, 7, 11, 13
- ρ_i pseudodistance du satellite i . 26, 30, 32, 33
- $\dot{\rho}_i$ pseudovitesse du satellite i . 27, 30, 33, 34
- \mathbf{r}_i position du satellite i . 21, 23, 24, 27, 28, 33, 132, 135
- $\Gamma_{\tau, \Delta f}^l$ réplique du non-bruitée du signal du satellite l , pour un décalage temporel τ et un décalage fréquentiel Δf . 12
- SNR rapport signal à bruit (*Signal to Noise Ratio*), en dB. 31, 32
- \mathbf{S} matrice de covariance de l'innovation du filtre de Kalman. 38, 39
- s nombre de satellites dont le signal est reçu par le récepteur. 34, 35, 39, 40, 47, 49–51, 55, 76, 83–88, 104, 105, 110, 117–121, 157–160, 162–164, 170, 173, 178–181
- S_λ opérateur de seuillage doux de seuil λ . 44, 45
- \mathcal{S} ensemble des satellites dont le signal est reçu par le récepteur. 10–12
- τ_i temps de propagation du signal reçu par le récepteur émis par le satellite i . xix, 9–12, 14–17, 21–26, 29
- $\tau_{i,k}^2$ variable intermédiaire pour la définition de la loi a priori sur $m_{i,k}$ à l'instant k . 83–88, 101, 157–164
- $\boldsymbol{\tau}_k^2$ vecteur des variables $\tau_{i,k}^2$. 84–88, 158, 159, 162–164
- T_b écart par rapport au point prompt avec lequel sont créés les répliques E et L du la DLL. 14–16
- T_c temps chip du code C/A, $T_c = 1/(1023 \times 10^3) \approx 10^{-6}$ s. 7, 15, 16
- $\boldsymbol{\theta}_k$ vecteur des biais multitrajet \mathbf{m}_k pondéré. 51, 52
- θ_i angle d'élévation du satellite i . 22, 31, 47, 49–51, 134, 137, 138, 140, 141
- T_i temps d'intégration du récepteur. xix, 11, 16, 17
- t_R date à laquelle le signal arrive au récepteur. 26, 132, 135, 137, 138
- T_s période d'échantillonnage du récepteur. xix, 11–13
- t_{S_i} date à laquelle le signal part du satellite i . 25, 26, 28, 131, 132, 135
- \mathbf{u} bruit d'état. 36, 47, 82, 83, 120, 158
- \mathbf{v} vecteur vitesse du récepteur. 23, 27, 28, 33, 34, 92, 96, 98, 104, 105, 134–136
- \mathbf{v}_i vecteur vitesse du satellite i . 21, 23, 27, 28, 33, 34, 133–136
- \mathbf{W} matrice de pondération du problème weighted- ℓ_1 de la navigation. 47, 50–52, 100, 165

- \mathbf{x} variation du vecteur d'état $\boldsymbol{\xi}$. 34–37, 47, 50, 52, 55, 56, 82–88, 100, 158–165
- $\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}$ estimateur du maximum de vraisemblance (*Maximum Likelihood* de \mathbf{x}). 35
- $\boldsymbol{\xi}$ vecteur d'état du problème de la navigation. 34, 36–40, 47, 76, 82, 83, 85, 104, 117, 120, 159, 177–181
- \mathbf{y} variation du vecteur de mesures \mathbf{z} . 34, 35, 37–40, 47, 50, 52, 55, 56, 82, 83, 85–88, 100, 159, 162, 163
- $\tilde{\mathbf{y}}_k$ projection des mesures \mathbf{y}_k sur l'orthogonal de $\text{Vec}(\mathbf{H}_k)$. 50–52
- \mathbf{z} vecteur de mesures du problème de la navigation. 34, 36–38, 104, 120, 177–181
- \mathbf{z}_p vecteur de mesures pseudodistance. 34, 40
- \mathbf{z}_r vecteur de mesures pseudovitesse. 34, 40

Liste des figures

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Illustrations des propriétés d'orthogonalité des codes bruit pseudo-aléatoire, ou <i>Pseudo Random Noise</i> (PRN) (à iso-puissance) pour le satellite 24 et les satellites 6 et 24. | 7 |
| 1.2 | Maximums de corrélation pour le code PRN (à iso-puissance) 24 et tous les autres (unicité du maximum). | 8 |
| 1.3 | Construction du signal <i>Global Positioning System</i> (GPS) sur la bande L_1 . . . | 8 |
| 1.4 | Répartition des stations sol GPS, d'après NAVSTAR [1996] | 9 |
| 1.5 | Schéma global d'un récepteur GPS. | 10 |
| 1.6 | Corrélation normalisée entre le signal et sa réplique en fonction de Δf pour plusieurs valeurs de N ($T_s=R_c/2$, $\Delta f_l = 2000\text{Hz}$). | 13 |
| 1.7 | Schéma résumant la procédure d'acquisition effectuée par un récepteur GPS. | 14 |
| 1.8 | Schéma résumant une boucle à verrouillage de délai, ou <i>Delay Lock Loop</i> (DLL) pour le satellite i | 15 |
| 1.9 | Corrélation normalisée entre le signal (temps de propagation τ_i , à estimer) et sa réplique (temps de propagation τ , que l'on peut choisir) en fonction de $(\tau_i - \tau)/T_c$ | 15 |
| 1.10 | Sortie du discriminateur avance retard normalisé en fonction de l'erreur d'estimation. | 16 |
| 1.11 | Schéma résumant une boucle à verrouillage de fréquence, ou <i>Frequency Lock Loop</i> (FLL) pour le satellite i | 17 |
| 1.12 | Sortie du discriminateur <i>cross</i> fonction de l'erreur d'estimation ($t_2 - t_1 = T_i = 10$ ms). | 17 |
| 1.13 | Répartition des stations sol Galileo, d'après ESA [2014] | 19 |
| 1.14 | Répartition des stations sol GLONASS, d'après Navipedia [2011] | 20 |
| 1.15 | Principe de trilatération : on suppose que 3 balises, resp. S_1, S_2, S_3 , entourent un objet à positionner et qu'on connaît les distances qui les séparent de cet objet, resp. d_1, d_2, d_3 . Une distance réduit l'espace à une sphère, 2 à un cercle et 3 à deux points (en rouge). Si on cherche à positionner un objet sur Terre, l'ambiguïté sur les deux points peut être levée (un des deux points sera dans l'espace). | 21 |
| 1.16 | Définition de latitude (ϕ) et de longitude (λ), et comment passer du repère repère géocentrique, Terre fixe, ou <i>Earth Centered Earth Fixed</i> (ECEF) au repère local repère local est, nord, haut, ou <i>East North Up</i> (ENU) (Wikipédia : Coordonnées Géographiques). ATTENTION : selon la référence, les notations peuvent être échangées (c'est le cas par exemple dans Farrell et Barth [1999]). | 22 |
| 1.17 | Définition de l'angle d'azimut ψ_i et de l'angle d'élévation θ_i dans le repère local ENU (d'après Groves, 2008a , Chap. 7.1.3). | 23 |

| | | |
|------|---|----|
| 1.18 | Illustrations de l'impact géométrique de l'environnement sur les signaux systèmes de navigation par satellites, ou <i>Global Navigation Satellite System</i> (GNSS) : dans tous les cas, le signal reçu par le récepteur (en rouge) issu de S_1 est le signal direct, ou <i>Line Of Sight</i> (LOS). Dans (a), le signal reçu émis par S_2 est la somme du LOS et du signal indirect, ou <i>Non Line Of Sight</i> (NLOS), dans (b), le signal reçu émis par S_2 n'est que le NLOS, et dans (c), le signal émis par S_2 n'est pas reçu (masquage). | 25 |
| 1.19 | Relation entre la différents instants et retards (d'après [Kaplan et Hegarty, 2006, Chap. 7.2]). | 26 |
| 1.20 | Exemple de skyplot. | 32 |
| 1.21 | Représentation du concept de dilution de précision. Les cercles en traits pleins correspondent aux mesures exactes de distance pour chacun des satellites, alors que les cercles en pointillés représentent ces mesures \pm leurs incertitudes. On remarque qu'à droite, la zone d'incertitude (en orange) est plus petite qu'à gauche, d'où l'importance d'avoir une bonne dilution de précision | 33 |
| 1.22 | Algorithme de positionnement de référence. | 40 |
| 2.1 | De gauche à droite : (a) Vecteur parcimonieux θ_0 à estimer, contrainte $\tilde{y} = H\theta$, et boule ℓ_1 de rayon $\ \theta_0\ _1$. (b) Existence d'un vecteur $\theta_1 \neq \theta_0$ tel que $\ \theta_1\ _1 < \ \theta_0\ _1$ et vérifiant la contrainte. (c) Boule ℓ_1 pondérée : il n'y a pas de vecteur $\theta \neq \theta_0$ vérifiant la contrainte tel que $\ Wx\ _1 \leq \ Wx_0\ _1$, où W est une matrice de pondération, d'après Candès et al. [2008]. | 45 |
| 2.2 | Comparaison des différentes pénalités présentées précédemment. | 48 |
| 2.3 | Fonction de pondération $w_1(C/N_0)$ pour différentes valeurs de a ($A = 30, F = 20$ dBHz et $T = 45$ dBHz). | 49 |
| 2.4 | Fonction de pondération $w_2(\theta_i)$ pour différentes valeurs de θ_0 | 50 |
| 2.5 | Illustration du problème présenté en 3 dimensions. | 51 |
| 2.6 | Illustration de la contradiction entre la valeur de biais théorique et le poids correspondant. N.B., la zone où tous les paramètres sont nuls correspond à un masquage du satellite (son signal n'est pas reçu par le récepteur). | 52 |
| 2.7 | Variations des RMSE pour chaque paramètres fixé par validation croisée. Les valeurs choisies sont représentées par une ligne noire verticale en tirets. | 57 |
| 2.8 | Comparaison des différentes méthodes présentées pour l'estimation des biais de mesure dus aux multitrajets. | 58 |
| 2.9 | Comparaisons des RMSE pour différentes filtrages de l'état. | 59 |
| 2.10 | Trajectoire utilisée pour générer les données réalistes. | 59 |
| 2.11 | Comparaison entre méthode de référence (sans correction des multitrajets, en pointillés) et méthode proposée (correction par LASSO pondéré, en traits pleins) en terme d'erreur de positionnement au cours du temps. | 60 |
| 2.12 | Comparaison entre méthode de référence (sans correction des multitrajets, en pointillés) et méthode proposée (correction par LASSO pondéré, en traits pleins) en fonction du nombre de satellites affectés par des multitrajets. | 60 |
| 2.13 | Comparaison entre méthode de référence (sans correction des multitrajets, en pointillés) et méthode proposée (correction par LASSO pondéré, en traits pleins) en fonction du nombre de satellites affectés par des multitrajets (zoom). | 61 |
| 2.14 | Trajectoire de la campagne de mesure complète (gauche), skyplot (en haut à droite) et nombre de satellites au cours du temps (en bas à droite) pour la campagne entière. La surface verte dans le skyplot représente les élévations inférieures à 5° , la zone verte dans l'évolution du nombre de satellites représente le scénario "ciel ouvert" et la zone rouge le scénario "environnement urbain". | 61 |
| 2.15 | Comparaison entre méthode de référence (sans correction des multitrajets, en pointillés) et méthode proposée (correction par LASSO pondéré, en traits pleins) en fonction du nombre de satellites affectés par des multitrajets (zoom). | 62 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.16 | Comparaison de différentes valeurs de θ_0 pour une pondération par l'élévation seule et pondération par C/N_0 seule. | 63 |
| 2.17 | Comparaison de différentes valeurs de θ_0 pour une pondération par l'élévation et par C/N_0 | 63 |
| 2.18 | Evolution temporelle de l'erreur de position pour la solution du récepteur (Ublox), de la méthode de référence (EKF), et de la méthode proposée (Weighted LASSO). | 64 |
| 2.19 | CDFs de l'erreur de position pour la solution donnée par le récepteur (Ublox), la méthode de référence (EKF), et la méthode proposée (Weighted LASSO). | 64 |
| 2.20 | Trajectoire du scénario "ciel dégagé". | 65 |
| 2.21 | Skyplot (à gauche) et nombre de satellites au cours du temps (à droite) pour le scénario "ciel dégagé". | 65 |
| 2.22 | Evolution temporelle de l'erreur de position pour la solution du récepteur (Ublox), de la méthode de référence (EKF), et de la méthode proposée (Weighted LASSO) pour le scénario "ciel dégagé". | 66 |
| 2.23 | CDFs de l'erreur de position pour la solution donnée par le récepteur (Ublox), la méthode de référence (EKF), et la méthode proposée (Weighted LASSO) pour le scénario "ciel dégagé". | 66 |
| 2.24 | Trajectoire du scénario "environnement urbain". | 67 |
| 2.25 | Skyplot (à gauche) et nombre de satellites au cours du temps (à droite) pour le scénario "environnement urbain". | 67 |
| 2.26 | Evolution temporelle de l'erreur de position pour la solution du récepteur (Ublox), de la méthode de référence (EKF), et de la méthode proposée (Weighted LASSO) pour le scénario "environnement urbain". | 68 |
| 2.27 | CDFs de l'erreur de position pour la solution donnée par le récepteur (Ublox), la méthode de référence (EKF), et la méthode proposée (Weighted LASSO) pour le scénario "environnement urbain". | 68 |
| 2.28 | CDF des erreurs dans le plan (à droite) et d'altitude (à gauche) pour différentes méthodes. | 69 |
| 2.29 | Détails des trajectoires pour différentes méthodes. | 70 |
| 2.30 | Evolution des erreurs estimées dans le plan (en haut) et d'altitude (en bas) au cours du temps pour chacune des méthodes. | 71 |
| 2.31 | CDF estimées des erreurs dans le plan (à gauche) et d'altitude (à droite) pour chacune des méthodes. Les tracés en pointillés correspondent aux méthodes qui existent déjà. | 72 |
| 2.32 | Evolution des erreurs estimées dans le plan (en haut) et d'altitude (en bas) au cours du temps pour chacune des méthodes pour le scénario "ciel dégagé". | 73 |
| 2.33 | CDF estimées des erreurs dans le plan (à gauche) et d'altitude (à droite) pour chacune des méthodes pour le scénario "ciel dégagé". | 73 |
| 2.34 | Evolution des erreurs estimées dans le plan (en haut) et d'altitude (en bas) au cours du temps pour chacune des méthodes pour le scénario "environnement urbain". | 74 |
| 2.35 | CDF estimées des erreurs dans le plan (à gauche) et d'altitude (à droite) pour chacune des méthodes pour le scénario "environnement urbain". | 74 |
| 2.36 | Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence de chacun des algorithmes de minimisation ℓ_1 au cours du temps. | 75 |
| 2.37 | Erreurs horizontale et verticale pour des nombres d'itérations fixe et variable. | 76 |
| 3.1 | Grappe de la hiérarchie utilisée pour le modèle Bayésien pour le traitement des multitrajets GNSS. | 85 |
| 3.2 | Biais de mesure théoriques pour les pseudodistances (à gauche) et les pseudovitesse (à droite). | 88 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.3 | Biais de mesure estimés moyens (pointillés) plus ou moins les variances associées et biais théoriques (traits plein) pour les pseudodistances pour la méthode weighted LASSO Bayésienne (à gauche) et la méthode weighted LASSO avec $\lambda_k=1$ | 89 |
| 3.4 | Biais de mesure estimés moyens (pointillés) plus ou moins les variances associées et biais théoriques (traits plein) pour les pseudovitesse pour la méthode weighted LASSO Bayésienne (à gauche) et la méthode weighted LASSO avec $\lambda_k=1$ | 90 |
| 3.5 | Erreurs de position au cours du temps pour le filtre EKF, l'algorithme LASSO pondéré (wLASSO) et l'algorithme proposé (wLASSO Bayésien). | 90 |
| 3.6 | Erreurs de position au cours du temps pour le filtre EKF, l'algorithme LASSO pondéré (wLASSO) et l'algorithme proposé (wLASSO Bayésien). | 91 |
| 3.7 | Estimation de l'hyperparamètre λ_k et nombre de multitrajets au cours du temps. | 92 |
| 3.8 | Histogrammes des biais multitrajet estimés pour les pseudodistances de chaque satellite en l'absence de multitrajet, biais estimés (pointillés) et biais théoriques (traits pleins). | 93 |
| 3.9 | Histogrammes des biais multitrajet estimés pour les pseudovitesse de chaque satellite en l'absence de multitrajet, biais estimés (pointillés) et biais théoriques (traits pleins). | 93 |
| 3.10 | Histogrammes du vecteur d'état estimés (position et biais d'horloge) en l'absence de multitrajet. | 94 |
| 3.11 | Histogrammes du vecteur d'état estimés (vitesse et dérive d'horloge) en l'absence de multitrajet. | 94 |
| 3.12 | Histogrammes de l'hyperparamètre λ_k estimés en l'absence de multitrajet. | 95 |
| 3.13 | Histogrammes des biais multitrajet estimés pour les pseudodistances de chaque satellite en présence d'un multitrajet, biais estimés (pointillés) et biais théoriques (traits pleins). | 95 |
| 3.14 | Histogrammes des biais multitrajet estimés pour les pseudovitesse de chaque satellite en présence d'un multitrajet, biais estimés (pointillés) et biais théoriques (traits pleins). | 96 |
| 3.15 | Histogrammes du vecteur d'état estimés (position et biais d'horloge) en présence d'un multitrajet. | 96 |
| 3.16 | Histogrammes du vecteur d'état estimés (vitesse et dérive d'horloge) en présence d'un multitrajet. | 97 |
| 3.17 | Histogrammes de l'hyperparamètre λ_k estimés en présence d'un multitrajet. | 97 |
| 3.18 | Histogrammes des biais multitrajet estimés pour les pseudodistances de chaque satellite en présence de deux multitrajets, biais estimés (pointillés) et biais théoriques (traits pleins). | 98 |
| 3.19 | Histogrammes des biais multitrajet estimés pour les pseudovitesse de chaque satellite en présence de deux multitrajets, biais estimés (pointillés) et biais théoriques (traits pleins). | 98 |
| 3.20 | Histogrammes du vecteur d'état estimés (position et biais d'horloge) en présence de deux multitrajets. | 99 |
| 3.21 | Histogrammes du vecteur d'état estimés (vitesse et dérive d'horloge) en présence de deux multitrajets. | 99 |
| 3.22 | Histogrammes de l'hyperparamètre λ_k estimés en présence de deux multitrajets. | 100 |
| 3.23 | CDFs estimées pour l'EKF, la méthode wLASSO avec $\lambda_k = 1$ et la méthode wLASSO Bayésienne avec estimation de λ_k | 101 |
| 4.1 | Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 5. | 106 |
| 4.2 | Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 12. | 106 |
| 4.3 | Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 13. | 107 |
| 4.4 | Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 17. | 107 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.5 | Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 18. | 108 |
| 4.6 | Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 22. | 108 |
| 4.7 | Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 24. | 109 |
| 4.8 | Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 28. | 109 |
| 4.9 | Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 5. | 111 |
| 4.10 | Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 12. | 111 |
| 4.11 | Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 13. | 112 |
| 4.12 | Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 15. | 112 |
| 4.13 | Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 17. | 113 |
| 4.14 | Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 18. | 113 |
| 4.15 | Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 22. | 114 |
| 4.16 | Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 24. | 114 |
| 4.17 | Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 28. | 115 |
| 4.18 | CDF estimées des erreurs de positionnement pour la méthode parcimonieuse et les méthodes à base de mélanges de Gaussiennes. | 121 |
| 4.19 | Illustration des différentes trajectoires obtenues pour la méthode parcimonieuse et les méthodes à base de mélanges de Gaussiennes. | 122 |
| 4.20 | Illustration des différentes trajectoires obtenues pour la méthode parcimonieuse et les méthodes à base de mélanges de Gaussiennes. | 122 |
| 4.21 | Illustration où les méthodes HMM ont du mal à estimer la trajectoire correctement. | 123 |
| 4.22 | Evolution du nombre de passage d'un état à un autre dans les mesures (pour la méthode parcimonieuse, la méthode à mélanges de Gaussiennes à un changement max.). | 124 |
| 4.23 | Evolution du nombre de passage d'un état à un autre dans les mesures (pour la méthode parcimonieuse, la méthode à mélanges de Gaussiennes à deux changements max.). | 124 |
| A.1 | Représentation en deux dimensions pour l'illustration de l'effet Doppler . . . | 134 |
| B.1 | CDFs pour la méthode proposée et la solution constructeur. | 143 |
| B.2 | Illustration des trajectoires pour le récepteur M8T. | 144 |
| B.3 | Illustration des trajectoires pour le récepteur M8T. | 144 |
| B.4 | CDFs pour la méthode proposée et la solution constructeur. | 145 |
| B.5 | Illustration des trajectoires pour le smartphone. | 145 |
| B.6 | Illustration des trajectoires pour le smartphone. | 146 |
| B.7 | Représentation des différents discriminateurs en présence d'un multitrajet de retard $\theta = 0.3$ | 150 |
| B.8 | Représentation de la fonction ζ pour $d = 0.1$ | 151 |
| C.1 | Graphe de la hiérarchie utilisée pour le modèle Bayésien pour le traitement des multitrajets GNSS. | 159 |
| C.2 | Lois a posteriori estimées sans étape de Metropolis Hastings et valeurs théoriques (lignes verticales) pour les vecteurs de biais pseudodistance (à gauche) et pseudovitesse (droite) à un instant fixé. Théoriquement, seuls 3 canaux sont affectés par des multitrajets (satellites 3, 5 et 7). | 166 |
| C.3 | Lois a posteriori estimées avec étape de Metropolis Hastings et valeurs théoriques (lignes verticales) pour les vecteurs de biais pseudodistance (à gauche) et pseudovitesse (droite) à un instant fixé. Théoriquement, seuls 3 canaux sont affectés par des multitrajets (satellites 3, 5 et 7). | 166 |
| C.4 | Lois a posteriori estimées avec étape de Metropolis Hastings pour les différents hyperparamètres. | 167 |

| | | |
|-----|---|-----|
| C.5 | Biais de mesure estimés moyens (pointillés) plus ou moins leur variance et biais théoriques (traits plein) pour les pseudodistances (à gauche) et les pseudovitesse (à droite). | 168 |
| C.6 | Erreur de position au cours du temps pour l'EKF et la méthode Bayésienne proposée. | 169 |
| C.7 | Biais de mesure estimés moyens (pointillés) plus ou moins leur variance et biais théoriques (traits plein) pour les pseudodistances. | 170 |
| C.8 | Biais de mesure estimés moyens (pointillés) plus ou moins leur variance et biais théoriques (traits plein) pour les pseudovitesse | 171 |
| C.9 | Erreur de position au cours du temps pour l'EKF et la méthode Bayésienne proposée pour des biais multitrajets plus réalistes. | 171 |

Liste des tableaux

| | | |
|------|--|-----|
| 1.1 | Différents paramètres de variance d'Allan pour différents types d'horloge. . . | 37 |
| 2.1 | Solution du problème unidimensionnel. | 55 |
| 2.2 | Chiffres clés de l'erreur de positionnement dans le plan horizontal et en altitude. (a) campagne de mesure entière, (b) ciel ouvert and (c) environnement urbain. | 68 |
| 2.3 | Centiles d'erreur choisis pour l'erreur dans le plan (en haut) et d'altitude (en bas) pour les différentes méthodes (en mètres). | 72 |
| 2.4 | Temps de calcul des différentes méthodes. | 75 |
| 2.5 | Résumé des différentes méthodes de navigation présentées dans ce chapitre. . | 76 |
| 4.1 | Mélanges de Gaussiennes estimés pour les erreurs de pseudodistances de chaque satellite. | 110 |
| 4.2 | Mélanges de Gaussiennes estimés pour les erreurs de pseudovitesse de chaque satellite. | 115 |
| 4.3 | Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 5. | 117 |
| 4.4 | Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 12. | 118 |
| 4.5 | Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 13. | 118 |
| 4.6 | Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 15 (satellite de référence). | 118 |
| 4.7 | Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 17. | 118 |
| 4.8 | Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 18. | 119 |
| 4.9 | Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 22. | 119 |
| 4.10 | Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 24. | 119 |
| 4.11 | Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 28. | 120 |
| A.1 | Tableau des valeurs moyennes pour les différents paramètres nécessaires à leur interpolation. | 139 |
| A.2 | Tableau des amplitudes pour les différents paramètres nécessaires à leur inter- polation. | 139 |
| A.3 | Tableau des moyennes amplitudes pour les paramètres de la fonction de map- ping hydrostatique. | 140 |
| A.4 | Tableau des coefficients d'interpolation pour les paramètres de la fonction de mapping non-hydrostatique. | 141 |
| B.1 | Intervalle d'étude de la fonction χ_δ selon les valeurs de δ | 153 |

| | | |
|-----|--|-----|
| B.2 | Valeurs la fonction χ_δ selon les valeurs de δ | 154 |
| B.3 | Valeurs de u qui annulent la fonction χ_δ en fonction de δ | 155 |
| B.4 | Valeurs des sorties du discriminateur en fonction du retard du multitrajet en chips. | 155 |
| B.5 | Valeurs du biais sur la pseudodistance pour un multitrajet en fonction de $\Delta\tau$ | 155 |

Introduction

Contexte et problématique de la thèse

Les performances, dont la précision et la disponibilité, d'un GNSS, sont fortement corrélées à la qualité des mesures en entrée des algorithmes de navigation. Or les mesures de code GNSS sont affectées de nombreuses erreurs comme le bruit thermique lié aux événements de diffusion thermique, le bruit causé par les interférences liées à l'environnement du récepteur, et enfin l'erreur liée aux multitrajets. Cette thèse étudie divers algorithmes de positionnement cherchant à diminuer l'impact des erreurs dues aux signaux multitrajets.

Une première idée a été de supposer que les signaux multitrajets induisent des biais additifs perturbant les mesures GNSS. Une hypothèse majeure faite dans ce travail est de supposer que parmi tous les satellites en vue, certains d'entre eux ne sont pas affectés par des multitrajets, ce qui permet d'utiliser des méthodes d'estimation parcimonieuse pour 1) détecter les satellites étant perturbés (ou pas) par les signaux multitrajets, 2) estimer les biais additifs associés aux satellites affectés par ces perturbations, 3) et enfin corriger les mesures pour améliorer le calcul de la position de l'utilisateur. Cette estimation parcimonieuse des biais multitrajets peut être aidée par plusieurs traitements comme le lissage temporel des biais estimés, l'estimation robuste de la matrice de covariance des erreurs résiduelles, ou encore l'estimation des hyperparamètres nécessaires au réglage de la méthode. Une seconde idée abordée dans cette thèse est de modéliser les erreurs dues aux signaux multitrajets à l'aide de mélanges de gaussiennes ou de modèles de Markov cachés et de proposer des algorithmes de positionnement adaptés.

Ce travail de thèse a été mené au laboratoire TésA et a fait l'objet d'un co-financement du CNES et de la société M3 Systems.

Organisation du manuscrit

Le premier chapitre de la thèse présente les différents GNSS ainsi que leurs fonctionnements, rappelle les différentes mesures disponibles à la sortie des récepteurs associés, et explicite le calcul d'une position utilisateur à partir de ces mesures. Ce chapitre montre aussi comment l'environnement va venir impacter et fausser les mesures utilisées, et présente certains modèles de la littérature permettant de limiter ces effets. Ce chapitre introduit également les phénomènes de multitrajets (réflexions) qui reçoivent actuellement un grand intérêt du fait des difficultés liées à leur modélisation.

Le deuxième chapitre de la thèse s'intéresse à l'étude d'un nouvel algorithme de positionnement robuste à la présence de multitrajets. Nous proposons plus précisément de détecter les satellites présentant des multitrajets, et de corriger les impacts de ces derniers sur les mesures utilisées pour le calcul de la position. Pour cela, nous modélisons l'impact des multitrajets sur les mesures à l'aide de biais dont la valeur caractérise la présence et l'amplitude de ces multitrajets. Plus précisément, parmi toutes les mesures disponibles, on suppose que certaines ne souffrent pas de multitrajet, et que les biais associés sont nuls. De plus, on suppose que les biais non nuls sont présents avec une hypothèse de parcimonie. Cette hypothèse permet de formaliser le problème de positionnement comme la minimisation d'un critère des moindres

carrés pénalisé par une norme ℓ_1 pondérée (weighted- ℓ_1), dont les poids dépendent du C/N_0 et de l'élévation de chaque satellite (agissant comme des indicateurs de confiance pour les mesures associées). Des variantes de la méthode sont aussi présentées, l'une permettant le lissage temporel des biais, et l'autre permettant une estimation robuste de la matrice de covariance. Les performances de la méthode proposée sont évaluées à l'aide de simulations effectuées pour des données synthétiques et réelles. Les résultats montrés sont très convaincants et montrent l'intérêt de la méthode présentée. Cependant le critère à minimiser dépend d'un paramètre de régularisation qui doit être ajusté par validation croisée. L'objectif du prochain chapitre est de tester la performance de techniques d'estimation Bayésienne qui permettent d'estimer les paramètres de régularisation conjointement avec les autres paramètres du modèle de navigation

Le troisième chapitre s'intéresse à l'estimation Bayésienne des paramètres du modèle introduit au chapitre précédent pour le positionnement en présence de multitrajets. Plus précisément, on cherche à estimer la loi a posteriori de l'ensemble des paramètres de ce modèle à l'aide de méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov, ou *Markov chain Monte Carlo* (MCMC). Ces paramètres sont le vecteur de biais multitrajet, les divers paramètres d'intérêt pour la navigation par satellites (dont la position et la vitesse du récepteur) et le paramètre de régularisation permettant d'équilibrer l'effet de la norme ℓ_1 pondérée par rapport au terme d'attache aux données. Pour cela, une vraisemblance Gaussienne est choisie sur les mesures, une loi a priori favorisant la parcimonie est utilisée pour le vecteur de biais (loi de Laplace), une loi normale découlant de la théorie du filtre de Kalman est utilisée pour le vecteur des paramètres d'intérêt, et une loi non-informative est utilisée pour le paramètre de régularisation (loi de Jeffrey). La distribution a posteriori est ensuite estimée à l'aide d'un échantillonneur de Gibbs, qui génère chaque paramètre suivant sa loi conditionnelle. Les lois conditionnelles des différents paramètres et hyperparamètres sont calculées et explicitées dans ce chapitre. La méthode est ensuite testée expérimentalement sur des données synthétiques et réelles. Les performances en terme de positionnement sont inférieures à celles obtenues avec la méthode du chapitre 2, mais la méthode permet d'estimer le paramètre de régularisation, ce qui était un problème conséquent dans le chapitre précédent.

Dans le dernier chapitre, une nouvelle modélisation du bruit de mesures et des multitrajets est proposée, sous forme de mélanges de Gaussiennes et de modèles de Markov cachés, ou *Hidden Markov Model* (HMM), et des méthodes de filtrage associées à ces modèles sont étudiées.

Principales contributions

Les principales contributions de cette thèse sont exposées ci-dessous.

Chapitre 1

Ce chapitre présente la navigation par satellite dans son ensemble, depuis la génération du signal au sein du satellite jusqu'à son traitement par le récepteur pour en déduire les mesures ainsi que la position. D'autre part, une routine complète de positionnement est donnée afin de traiter les mesures d'un récepteur GNSS (calcul des positions et vitesses des satellites, calcul des différents termes d'erreur, filtrage de la position et de la vitesse du récepteur), dans le but de pouvoir travailler avec les mesures d'un récepteur low cost (qui est le but de cette thèse).

Chapitre 2

Ce chapitre formule le problème de la détection et de l'estimation des erreurs multitrajets sous forme d'un problème d'estimation parcimonieuse à l'aide d'une pénalisation ℓ_1 pondérée, dont les poids dépendent de certains paramètres physiques du problème. Ce travail

a fait l'objet d'une publication dans une revue scientifique [Lesouple et al. \[2018c\]](#) et d'un brevet [Lesouple et al. \[2017\]](#). D'autre part nous avons proposé plusieurs variantes de cette méthode, notamment en y associant un lissage temporel des biais, ce qui a fait l'objet d'une communication dans une conférence [Lesouple et al. \[2018b\]](#), et une estimation robuste de la matrice de covariance des erreurs, ce qui a aussi été présenté et publié en conférence [Lesouple et al. \[2018a\]](#).

Chapitre 3

Ce chapitre propose une nouvelle méthode d'estimation Bayésienne qui permet l'estimation parcimonieuse des biais multitrajets et l'estimation de l'hyperparamètre associé à la loi de Laplace utilisée pour assurer cette parcimonie. Cette contribution a été présentée et publiée dans une conférence [Lesouple et al. \[2018d\]](#).

Chapitre 4

Ce chapitre propose une estimation des densités des erreurs GNSS sous forme de mélanges de Gaussiennes ou de modèles HMM. Ces modèles sont ensuite utilisés pour filtrer la position et la vitesse d'un récepteur GNSS à l'aide d'un banc de filtre de Kalman étendus.

Publications

La thèse a donné lieu à plusieurs publications, résumées ci-dessous.

Brevet

- Lesouple, Julien, Tourneret, Jean-Yves, Vigneau, Willy, Sahnoudi, Mohamed, et Marmet, François-Xavier. Traitement des Multitrajets GNSS par Méthode Parcimonieuse, 2017. Déposé le 3 mai 2017, n°FR1 753 907

Article de revue

- Lesouple, Julien, Robert, Thierry, Sahnoudi, Mohamed, Tourneret, Jean-Yves, et Vigneau, Willy. Multipath Mitigation for GNSS Positioning in Urban Environment Using Sparse Estimation. *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.*, 2018, à paraître

Conférences

- Lesouple, Julien, Tourneret, Jean-Yves, Sahnoudi, Mohamed, Barbiero, Franck, et Faurie, Frédéric. Multipath Mitigation in Global Navigation Satellite Systems Using a Bayesian Hierarchical Model with Bernoulli Laplacian Priors. Dans *Proc. IEEE Workshop on Stat. Signal Processing (SSP)*, pages 578–582, Freiburg, Germany, June 2018
- Lesouple, Julien, Barbiero, Franck, Faurie, Frédéric, Sahnoudi, Mohamed, et Tourneret, Jean-Yves. Smooth Bias Estimation for Multipath Mitigation Using Sparse Estimation. Dans *Proc. IEEE Int. Conf. on Inf. Fusion (FUSION)*, pages 1684–1690, Cambridge, UK, July 2018
- Lesouple, Julien, Barbiero, Franck, Faurie, Frédéric, Sahnoudi, Mohamed, et Tourneret, Jean-Yves. Robust Covariance Matrix Estimation and Sparse Bias Estimation for Multipath Mitigation. Dans *Proc. of the 31st International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS+ 2018)*, pages 1684–1690, Miami, FL, Sept. 2018

Chapitre 1

La navigation par satellites

« Babacar, où-es tu ? »

France Gall

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1.1 | Introduction | 6 |
| 1.2 | Les systèmes de positionnement | 6 |
| 1.2.1 | GPS | 6 |
| 1.2.2 | Galileo | 18 |
| 1.2.3 | GLONASS | 19 |
| 1.2.4 | Compass-Beidou | 20 |
| 1.2.5 | Les systèmes d'augmentation | 20 |
| 1.3 | Positionnement | 21 |
| 1.3.1 | La trilatération | 21 |
| 1.3.2 | Etat du satellite | 21 |
| 1.3.3 | Les paramètres d'intérêt | 23 |
| 1.3.4 | Sources d'erreur | 24 |
| 1.3.5 | Les mesures | 26 |
| 1.4 | Correction des sources d'erreurs | 27 |
| 1.4.1 | Biais d'horloge satellite | 28 |
| 1.4.2 | Relativité | 28 |
| 1.4.3 | Erreurs dues aux éphémérides | 28 |
| 1.4.4 | Ionosphère | 28 |
| 1.4.5 | Troposphère | 29 |
| 1.4.6 | Erreurs dues à l'environnement | 29 |
| 1.4.7 | Erreurs dues au récepteur | 31 |
| 1.5 | Les indicateurs de qualité | 31 |
| 1.5.1 | Élévation | 31 |
| 1.5.2 | Rapport signal sur bruit | 31 |
| 1.5.3 | La dilution de précision | 32 |
| 1.6 | Estimation de l'état | 33 |
| 1.6.1 | La méthode des moindres carrés pondérés | 34 |
| 1.6.2 | Filtrage statistique par filtre de Kalman | 35 |
| 1.7 | Résumé de l'algorithme de positionnement de référence | 39 |

1.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de définir les bases de la navigation par satellites, et donc des GNSS. Les GNSS sont la généralisation du système américain GPS, qui est le plus connu de tous et qui est rentré dans le langage commun. Nous présenterons donc brièvement chaque système et ses spécificités, mais le principe de fonctionnement de ces systèmes reste le même (excepté une légère différence pour *Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema* (GLONASS) dont l'accès est fréquentiel), ce qui explique pourquoi nous traiterons indifféremment chacun d'entre eux. Nous verrons donc les différents objectifs de ces systèmes, les sources d'erreurs qui entrent en jeu et les différents modèles ou méthodes existants permettant de diminuer leurs impacts.

1.2 Les systèmes de positionnement

Il existe 6 systèmes GNSS (GPS, GLONASS, Galileo, Beidou, QZSS, IRNSS) qui sont complétés localement des systèmes satellitaires d'augmentation, ou *Satellite Based Augmentation Systems* (SBAS). Nous allons présenter ces différents systèmes, voir ce qui les lie, mais aussi leurs différences. Les systèmes GNSS sont constitués principalement de 3 segments :

- le segment spatial, i.e., la constellation de satellites,
- le segment de contrôle, i.e., les stations permettant la surveillance et le contrôle de la constellation,
- le segment utilisateur, i.e., toutes les personnes susceptibles d'utiliser le service,

que nous présentons dans les parties suivantes.

1.2.1 GPS

Le nom officiel du GPS est NAVSTAR GPS. Il a été développé pour le gouvernement américain dans un contexte militaire à partir de 1973. Son premier satellite opérationnel a été lancé en 1978, et le système devient totalement opérationnel avec 24 satellites à la fin de l'année 1993. Aujourd'hui, la constellation est constituée de 31 satellites, mais ce nombre est susceptible d'évoluer (avec une capacité maximale de 36 satellites).

Le système offre deux services de navigation : un service de navigation standard, *Standard Positioning System* (SPS), destiné à un usage commun (ce qu'on appelle communément GPS), et le service militaire *Precise Positioning System* (PPS). Bien entendu, le service militaire PPS offre une bien meilleure précision que le service civil SPS, mais son accès est restreint aux utilisateurs disposant d'une licence fournie par le gouvernement américain (généralement pour des utilisateurs militaires). D'ailleurs, jusqu'en 2000, le service SPS était volontairement dégradé par le gouvernement américain de l'ordre d'une centaine de mètres, par ce qui s'appelle la *Selective Availability* (SA). Depuis cette dégradation a été retirée, mais peut être réactivée par le gouvernement américain s'il le souhaite.

1.2.1.1 Segment spatial GPS

Les satellites GPS orbitent à une altitude de 20100 km de la surface de la Terre, correspondant à une orbite terrestre moyenne, ou *Middle Earth Orbit* (MEO), pour une période de révolution de 11h58. Comme précisé précédemment, la constellation est constituée de 31 satellites, répartis dans 6 plans orbitaux inclinés de 55° par rapport à l'équateur, et séparés par 60° de longitude. Les satellites ont pour but de transmettre à l'utilisateur les informations utiles pour qu'il puisse estimer sa position : le message de navigation. Celui-ci est notamment constitué de la date de transmission du signal, d'un code pseudo-aléatoire permettant à l'utilisateur d'identifier le satellite émetteur, des corrections d'horloge à appliquer, des éphémérides permettant à l'utilisateur de calculer la position et la vitesse du satellite et des paramètres

permettant d'estimer certains retards dus à l'atmosphère (nous reviendrons à ces derniers plus tard).

Les codes pseudo-aléatoires

Le signal est émis sur trois fréquences de la bande L , la fréquence $L_1=1575,42$ MHz, la fréquence $L_2=1227,6$ MHz et la fréquence $L_5=1176,45$ MHz. Ces fréquences ont été définies comme multiples d'une horloge centrale de référence de fréquence 10,23 MHz. On a en effet $L_1=154 \times 10,23$ MHz, $L_2= 120 \times 10,23$ MHz et $L_5= 115 \times 10,23$ MHz. Afin de transmettre le message de navigation, ces porteuses sont modulées par une modulation de phase à deux états, ou *Binary Phase Shift Keying* (BPSK). A partir des satellites IIRM et IIF (les deux blocs les plus récents), on a vu apparaître un signal *Binary Offset Carrier* (BOC). Le message de navigation est émis au rythme de $50 \text{ bits}\cdot\text{s}^{-1}$ et est composé de 25 trames de 320 s : sa transmission complète requiert donc 750 s (12,5 min). Cependant, chacune des trames transmises est composée de 5 sous-trames de 6 s commençant toutes par un mot de télémétrie, ou *TeLeMetry word* (TLM), permettant la détection de début de la sous-trame et ainsi sa date d'arrivée, suivi d'un mot handover, ou *HandOver Word* (HOW) qui contient la date d'émission en temps GPS de la prochaine sous-trame.

La technique de codage la plus utilisée en GNSS est l'accès multiple par répartition de code, ou *Code Division Multiple Access* (CDMA), qui utilise l'étalement de spectre afin de permettre à plusieurs liaisons numériques d'utiliser simultanément la même fréquence porteuse. Pour cela, chaque émetteur possède deux codes pseudo-aléatoires (codes de Gold) : le code civil, ou *Coarse Acquisition* (C/A), composé de 1023 symboles (*chips*) valant ± 1 , et de période 1 ms, et donc transmis à un rythme $R_c=1023/(1e^{-3})=1,023$ MHz (on définit aussi le temps chip T_c comme son inverse), destiné au service SPS, et le code militaire, ou *Precise* (P), qui est transmis à un rythme de 10,23 MHz, destiné au service PPS. Chacun de ces codes est un PRN, différent pour chacun des satellites, possédant des propriétés d'autocorrélation et d'intercorrélations très intéressantes :

- si deux codes correspondent à un même satellite, alors l'autocorrélation est un pic centré en 0 (qui correspond à un retard nul)
- l'intercorrélations entre les codes de deux satellites différents est faible et ressemble à celle obtenue pour deux codes d'un même satellite sans le pic à l'origine.

Ces deux propriétés sont illustrées dans les figures 1.1 et 1.2.

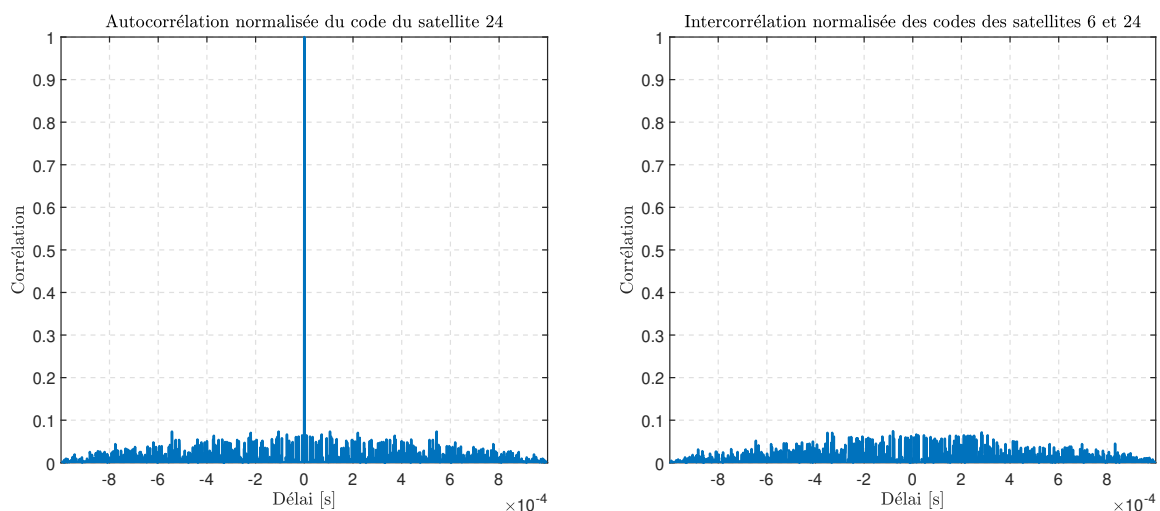


FIGURE 1.1 – Illustrations des propriétés d'orthogonalité des codes PRN (à iso-puissance) pour le satellite 24 et les satellites 6 et 24.

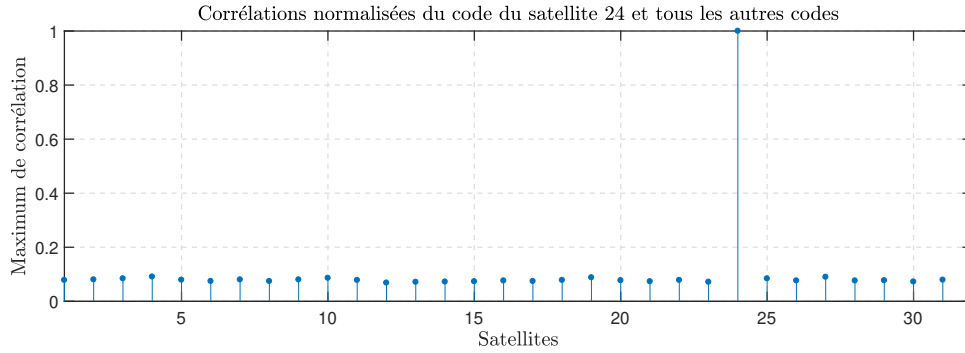


FIGURE 1.2 – Maximums de corrélation pour le code PRN (à iso-puissance) 24 et tous les autres (unicité du maximum).

Le signal GPS

Le signal émis par le satellite i sur la fréquence L_1 à la date t est défini par

$$s_{i,L_1}(t) = A_c(t)(q_i(t) \oplus c_i(t)) \cos(2\pi L_1 t) + A_p(t)(q_i(t) \oplus P_i(t)) \sin(2\pi L_1 t) \quad (1.1)$$

avec

- $A_c(t)$ l'amplitude d'émission de référence pour le code C/A à la date t
- $A_p(t)$ l'amplitude d'émission de référence pour le code P à la date t
- $q_i(t)$ le message de navigation du satellite i à la date t
- $c_i(t)$ le code C/A du satellite i à la date t
- $P_i(t)$ le code P du satellite i à la date t
- \oplus l'opérateur OU exclusif (équivalent à une addition modulo 2).

La construction du signal GPS pour la bande L_1 est résumée sur la figure 1.3.

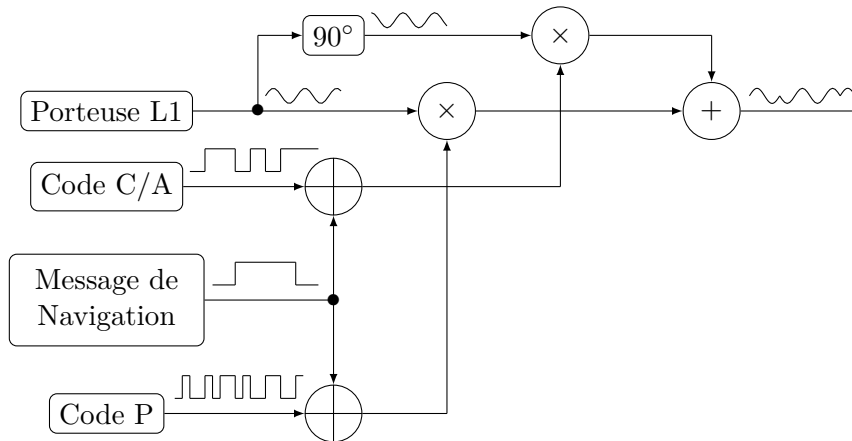


FIGURE 1.3 – Construction du signal GPS sur la bande L_1 .

1.2.1.2 Segment sol GPS

Le segment sol est constitué de trois infrastructures **NAVSTAR** [1996], réparties comme le montre la figure 1.4 :

- 5 stations de contrôle (Hawaii, Ascension, Diego Garcia et Kwajalein) dont une principale (Colorado Spring). Ces stations enregistrent les signaux émis par les satellites de la constellation, et la station principale envoie aux stations de transmission les éphémérides et paramètres d'horloge à transmettre aux satellites

- 3 stations de transmission (Ascension, Diego Garcia et Kwajalein) qui transmettent ces derniers paramètres aux différents satellites de la constellation
- un site de lancement, situé à Cap Canaveral, d'où sont envoyés les satellites.

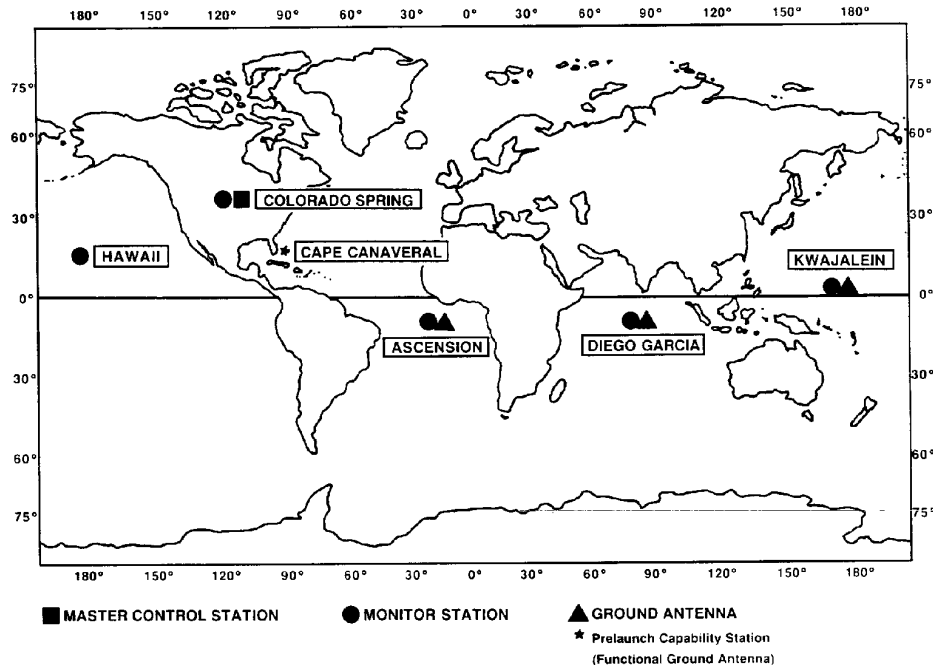


FIGURE 1.4 – Répartition des stations sol GPS, d'après NAVSTAR [1996]

1.2.1.3 Segment utilisateur GPS

Le segment utilisateur est constitué de l'ensemble des récepteurs GPS du commerce. Avant d'étudier les différents blocs composant ces récepteurs, exprimons le signal GPS sur la fréquence L_1 .

Signal GPS reçu sur la fréquence L_1

Le signal se déplace à la vitesse de la lumière dans le vide c , et nous négligeons, dans un premier temps, les diverses sources d'erreurs qui peuvent venir perturber les mesures. Nous allons d'autre part nous intéresser seulement à la composante C/A du signal, et ne pas considérer la composante P. De plus, comme le code C/A a une période de 1ms, et que le message de navigation transmet des données avec un débit de 50bits/s, soit 1bit toutes les 20ms, le code se répète 20 fois entre deux changements d'état du message de navigation. On peut donc se passer des données de navigation dans l'expression du signal en supposant un temps d'intégration inférieur à 20ms. Finalement, pour le satellite i , à la date t , étant donné le signal émis (1.1), le signal reçu a donc la même expression que le signal émis, mais atténué, retardé, décalé en fréquence, et déphasé, soit

$$s_i(t) = A_i(t)c_i(t - \tau_i(t)) \cos(2\pi f_i(t)t + \phi_i(t)) \quad (1.2)$$

avec

- $A_i(t)$ l'amplitude de réception du signal émis par le satellite i à la date t
- $\tau_i(t)$ le temps de propagation du signal reçu par le récepteur émis par le satellite i à la date t

- $f_i(t)$ la fréquence du signal reçu par le récepteur émis par le satellite i à la date t
- $\phi_i(t)$ le déphasage du signal reçu par le récepteur émis par le satellite i à la date t .

On peut en déduire le signal reçu par le récepteur, qui est la contribution des signaux émis par l'ensemble des différents satellites que le récepteur a en vue, que l'on note \mathcal{S}_t , est défini par

$$s(t) = \sum_{i \in \mathcal{S}_t} A_i(t) c_i(t - \tau_i(t)) \cos(2\pi f_i(t)t + \phi_i(t)) \quad (1.3)$$

Nous allons maintenant décrire les différents éléments mis en œuvre pour traiter ce signal $s(t)$ et retrouver les différents paramètres d'intérêt, $\tau_i(t)$, $f_i(t)$ et $\phi_i(t)$.

Architecture d'un récepteur GPS

Un récepteur GPS est constitué de différents blocs permettant d'obtenir les différentes mesures nécessaires au calcul de la position :

- une antenne, permettant de transformer l'onde électromagnétique en signal électrique
- un bloc frontal radiofréquence, composé de hardware permettant la mise en bande de base, l'amplification et la numérisation du signal
- un bloc d'acquisition, permettant d'identifier le satellite dont le signal provient et d'avoir une première estimation des paramètres d'intérêt (temps de propagation, fréquence, phase du signal)
- un bloc de poursuite, permettant de suivre au cours du temps l'évolution des différents paramètres d'intérêt
- un bloc de démodulation des données, permettant de récupérer les éphémérides nécessaires au calcul de la position, de la vitesse du satellite, et des paramètres permettant la correction des erreurs atmosphériques
- un bloc navigateur de Position Vitesse Temps, ou *Position Velocity Time* (PVT), permettant l'estimation des différents paramètres d'intérêt de l'utilisateur.

Cette configuration est représentée dans la figure 1.5. Nous allons détailler dans la suite les 3 premiers blocs. Le calcul de la position et la vitesse du satellite sera fait plus tard dans la partie 1.3.2, le calcul des erreurs dans la partie 1.4, alors que la partie PVT sera discutée dans la partie 1.6.

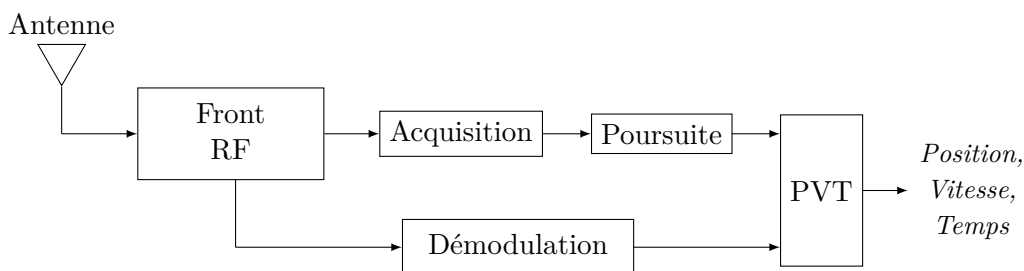


FIGURE 1.5 – Schéma global d'un récepteur GPS.

Le bloc radiofréquence

Le bloc frontal radiofréquence de la figure 1.5 est constitué des éléments suivants

- un amplificateur faible bruit, ou *Low Noise Amplifier* (LNA), permettant d'amplifier le signal GPS, qui a une puissance relativement faible (≈ 0.0001 pico Watts)
- un convertisseur de fréquence, permettant la mise en bande de base et en quadrature du signal (changement de fréquence de L_1 à f_{IF} , puis centrage). Avec les nouveaux composants, ce bloc a tendance à être supprimé car on effectue plutôt une numérisation directe du signal

- un convertisseur analogique numérique, ou *Analogic to Numeric Converter* (ANC), permettant de numériser le signal à traiter
- éventuellement un contrôle automatique de gain, ou *Automatic Gain Control* (AGC), permettant la détection d'interférence ou de brouillage.

Pour plus d'informations, le lecteur peut consulter [Groves, 2008a, Chap. 7.2.3]. L'électronique utilisée va aussi faire apparaître un bruit thermique $n(t)$. A la sortie de ce bloc, le signal a alors la forme

$$s(t) = \sum_{i \in \mathcal{S}_t} A_i(t) c_i(t - \tau_i(t)) e^{j(2\pi f_i(t)t + \phi_i(t))} + n(t). \quad (1.4)$$

On peut aussi exprimer ce signal en fonction des décalages de fréquence par rapport à la fréquence de référence f_{IF} , $\Delta f_i(t)$, définis par

$$\Delta f_i(t) = f_i(t) - f_{\text{IF}} \quad (1.5)$$

ce qui donne

$$s(t) = \sum_{i \in \mathcal{S}_t} A_i(t) e^{j\phi_i(t)} c_i(t - \tau_i(t)) e^{j2\pi(f_{\text{IF}} + \Delta f_i(t))t} + n(t). \quad (1.6)$$

Ensuite, la fréquence f_{IF} étant connue, on peut recentrer le signal autour de cette dernière, pour obtenir

$$s(t) = \sum_{i \in \mathcal{S}_t} A_i(t) e^{j\phi_i(t)} c_i(t - \tau_i(t)) e^{2j\pi\Delta f_i(t)t} + n(t). \quad (1.7)$$

Finalement, le signal est échantillonné à une fréquence $f_s = \frac{1}{T_s}$, en accord avec le théorème de Shannon Shannon [1998], i.e., $f_s \geq 2f_c = 2R_c$. On obtient finalement le signal discrétisé aux instants $t_m = T_0 + mT_s, m \in \mathbb{N}$, avec T_0 l'instant initial

$$s(t_m) = \sum_{i \in \mathcal{S}_{t_m}} A_i(t_m) e^{j\phi_i(t_m)} c_i(t_m - \tau_i(t_m)) e^{2j\pi\Delta f_i(t_m)t_m} + n(t_m) \quad (1.8)$$

soit en utilisant des notations discrètes

$$s[m] = \sum_{i \in \mathcal{S}_m} A_i[m] e^{j\phi_i[m]} c_i^{-\tau_i}[m] e^{2j\pi\Delta f_i[m](T_0 + mT_s)} + n[m] \quad (1.9)$$

où

- \mathcal{S}_m désigne l'ensemble des satellites visibles à l'instant m
- $A_i[m]$ désigne la puissance reçue du satellite i à l'instant m
- $\phi_i[m]$ désigne le déphasage sur le signal du satellite i à l'instant m
- $c_i^{-\tau_i}[m]$ désigne la discrétisation de la fonction $t \mapsto c_i(t - \tau_i(t))$ à l'instant m
- $\Delta f_i[m]$ désigne le décalage fréquentiel sur le signal du satellite i à l'instant m
- $n[m]$ désigne la valeur du bruit thermique à l'instant m .

Si on accumule ces différentes mesures pour N points d'échantillonnage, on obtient un vecteur $\mathbf{s} = [s(1), \dots, s(N)] \in \mathbb{C}^N$, et la valeur $T_i = NT_s$ est appelée temps d'intégration. Pour un temps d'intégration convenablement choisi en fonction du scénario (T_i de l'ordre de 1 à 1000 ms), on peut supposer que les paramètres $A_i[m], \tau_i[m], \Delta f_i[m], \phi_i[m]$ et l'ensemble des satellites \mathcal{S}_m sont constants pour $m \in \{1, \dots, N\}$, ce qui permet d'enlever la dépendance à la variable m et d'utiliser les notations $A_i, \tau_i, \Delta f_i, \phi_i$ et \mathcal{S} .

Le bloc d'acquisition

L'étape d'acquisition du signal a pour but d'isoler la contribution d'un seul satellite l au signal reçu, et d'effectuer une première estimation des paramètres τ_i et Δf_i . Les codes C/A étant connus, le récepteur est capable de construire des répliques non bruitées de chacun des codes des différents satellites, correspondant à différents décalages temporels et différents décalages fréquentiels. La réplique du code correspondant au satellite l , pour un décalage temporel τ , et un décalage fréquentiel Δf , est définie à la date m de la manière suivante

$$\Gamma_{\tau, \Delta f}^l[m] = c_l^{-\tau}[m] e^{2j\pi \Delta f (T_0 + mT_s)}. \quad (1.10)$$

Le récepteur crée différentes répliques, pour différentes valeurs de l , τ et Δf , et calcule leurs corrélations avec le signal reçu

$$\begin{aligned} r(\mathbf{s}, \mathbf{\Gamma}_{\tau, \Delta f}^l) &= \sum_{m=1}^N s[m] \overline{R_{\tau, \Delta f}^l[m]} \\ &= \sum_{m=1}^N \left[\sum_{i \in \mathcal{S}} A_i e^{j\phi_i} c_i^{-\tau_i}[m] e^{2j\pi \Delta f_i (T_0 + mT_s)} + n[m] \right] c_l^{-\tau}[m] e^{-2j\pi \Delta f (T_0 + mT_s)} \\ &= \sum_{m=1}^N \left[\sum_{i \in \mathcal{S}} A_i e^{j\phi_i} c_i^{-\tau_i}[m] c_l^{-\tau}[m] e^{2j\pi (\Delta f_i - \Delta f) (T_0 + mT_s)} + n[m] c_l^{-\tau}[m] e^{-2j\pi \Delta f (T_0 + mT_s)} \right] \\ &\approx \sum_{m=1}^N \sum_{i \in \mathcal{S}} A_i e^{j\phi_i} c_i^{-\tau_i}[m] c_l^{-\tau}[m] e^{2j\pi (\Delta f_i - \Delta f) (T_0 + mT_s)}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Pour trouver le temps de propagation τ , supposons que l'on connaît le décalage fréquentiel Δf_l , et qu'on fixe $\Delta f = \Delta f_l$. Alors,

$$\begin{aligned} r(\mathbf{s}, \mathbf{\Gamma}_{\tau, \Delta f_l}^l) &\approx \sum_{m=1}^N \sum_{i \in \mathcal{S}} A_i e^{j\phi_i} c_i^{-\tau_i}[m] c_l^{-\tau}[m] \\ &= \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{m=1}^N A_i e^{j\phi_i} c_i^{-\tau_i}[m] c_l^{-\tau}[m] \quad (\text{somme sur des ensembles finis}) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{S}} A_i e^{j\phi_i} \sum_{m=1}^N c_i^{-\tau_i}[m] c_l^{-\tau}[m] \\ &\approx A_l e^{j\phi_l} \sum_{m=1}^N c_l^{-\tau_l}[m] c_l^{-\tau}[m] \quad (\text{par propriété des codes C/A}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

et on sait que le pic de corrélation du code est centré en 0, ce qui correspond au cas $\tau = \tau_l$. Donc, en testant plusieurs valeurs de τ , celle qui maximise la fonction de corrélation précédente est $\tau = \tau_l$ ¹. D'autre part, on peut étudier la fonction $\Delta f \mapsto e^{2j\pi (\Delta f_l - \Delta f)t}$, et supposer que le récepteur reçoit effectivement le signal du satellite l , et qu'on connaît le

1. si le satellite l testé n'est pas présent dans le signal \mathbf{s} , la valeur de corrélation sera inférieure à un seuil théorique que l'on peut calculer à l'aide d'un test d'hypothèses : la corrélation avec le satellite l ne comporte que du bruit sous l'hypothèse H_0 alors que cette même corrélation correspond au signal du satellite l bruité sous l'hypothèse H_1

temps de propagation τ_l . On a alors

$$\begin{aligned}
r(\mathbf{s}, \mathbf{\Gamma}_{\tau_l, \Delta f}^l) &\approx A_l e^{j\phi_l} \sum_{m=1}^N c_l^{-\tau_l}[m] c_l^{-\tau_l}[m] e^{2j\pi(\Delta f_l - \Delta f)(T_0 + mT_s)} \\
&\propto \sum_{m=1}^N e^{2j\pi(\Delta f_l - \Delta f)(T_0 + mT_s)} \quad (\text{car la corrélation du code est alors égale au pic de corrélation}) \\
&\propto e^{2j\pi(\Delta f_l - \Delta f)T_0} \sum_{m=1}^N e^{2j\pi(\Delta f_l - \Delta f)(mT_s)} \\
&\propto e^{2j\pi(\Delta f_l - \Delta f)T_0} e^{2j\pi(\Delta f_l - \Delta f)T_s} \frac{1 - e^{2j\pi(\Delta f_l - \Delta f)NT_s}}{1 - e^{2j\pi(\Delta f_l - \Delta f)T_s}} \quad (\text{somme des termes d'une suite géométrique}) \\
&\propto e^{2j\pi(\Delta f_l - \Delta f)T_0} e^{2j\pi(\Delta f_l - \Delta f)T_s} \frac{e^{j\pi(\Delta f_l - \Delta f)NT_s} e^{-j\pi(\Delta f_l - \Delta f)NT_s} - e^{j\pi(\Delta f_l - \Delta f)NT_s}}{e^{j\pi(\Delta f_l - \Delta f)T_s} e^{-j\pi(\Delta f_l - \Delta f)T_s} - e^{j\pi(\Delta f_l - \Delta f)T_s}} \\
&\propto e^{2j\pi(\Delta f_l - \Delta f)(T_0 + \frac{N+1}{2}T_s)} \frac{\sin(\pi(\Delta f_l - \Delta f)NT_s)}{\sin(\pi(\Delta f_l - \Delta f)T_s)}.
\end{aligned}$$

Si on regarde maintenant le module de ce produit de corrélation, on obtient

$$\begin{aligned}
|r(\mathbf{s}, \mathbf{\Gamma}_{\tau, \Delta f}^l)| &\propto \left| e^{2j\pi(\Delta f_l - \Delta f)(T_0 + \frac{N+1}{2}T_s)} \frac{\sin(\pi(\Delta f_l - \Delta f)NT_s)}{\sin(\pi(\Delta f_l - \Delta f)T_s)} \right| \\
&\propto \left| \frac{\sin(\pi(\Delta f_l - \Delta f)NT_s)}{\sin(\pi(\Delta f_l - \Delta f)T_s)} \right|.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

C'est l'expression de la valeur absolue d'un noyau de Dirichlet, dont une représentation est donnée en figure 1.6, et dont le maximum global est atteint en 0, i.e., pour $\Delta f = \Delta f_l$. On en

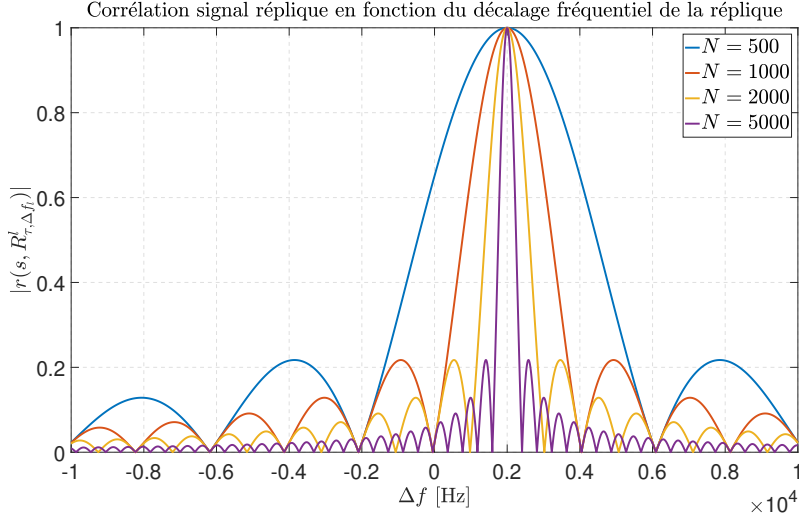


FIGURE 1.6 – Corrélation normalisée entre le signal et sa réplique en fonction de Δf pour plusieurs valeurs de N ($T_s = R_c/2$, $\Delta f_l = 2000\text{Hz}$).

déduit finalement que le couple $(\tau, \Delta f)$ qui maximise la fonction $|r(\mathbf{s}, \mathbf{\Gamma}_{\tau, \Delta f}^l)|$ est $(\tau_l, \Delta f_l)$ (si le satellite l est effectivement reçu par le récepteur). L'étape d'acquisition va donc consister en la création d'une grille $(\tau, \Delta f)$ pour chaque satellite de la constellation. Pour chaque point de chaque grille, le récepteur va calculer $|r(\mathbf{s}, \mathbf{\Gamma}_{\tau, \Delta f}^l)|$, comparer le maximum de cette valeur à un seuil théorique permettant de décider si le satellite est effectivement présent, et en déduire

$$(\hat{\tau}_l, \widehat{\Delta f}_l) = \arg \max_{(\tau, \Delta f)} |r(\mathbf{s}, \mathbf{\Gamma}_{\tau, \Delta f}^l)|. \tag{1.14}$$

Cette stratégie est résumée dans la figure 1.7.

L'étape d'acquisition permet donc d'identifier tout les satellites dont le signal est reçu, et d'estimer les paramètres $\tau_i(t)$ et $\Delta f_i(t)$ pour chacun de ces satellites. En revanche, cette étape étant très coûteuse en calculs, le récepteur ne la répète pas à chaque instant, et va plutôt poursuivre l'évolution des différents paramètres.

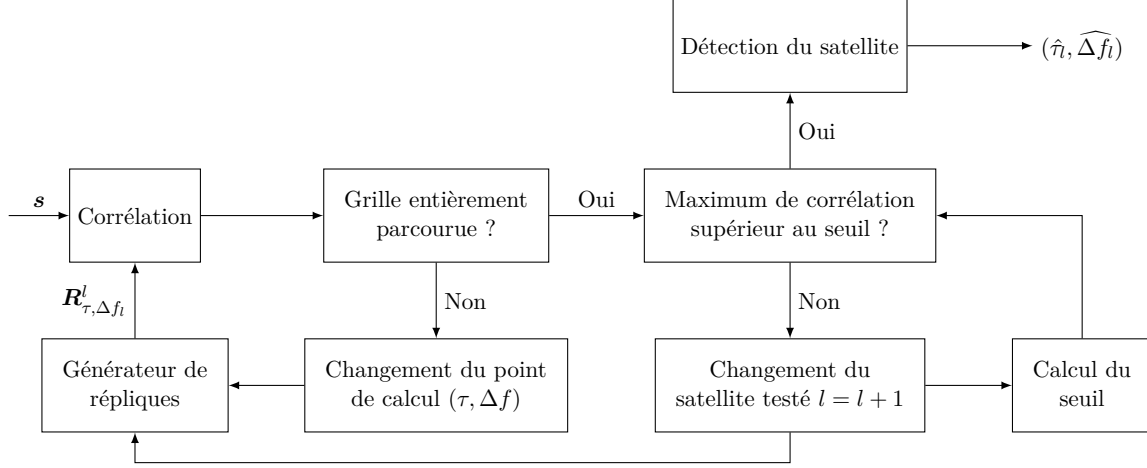


FIGURE 1.7 – Schéma résumant la procédure d'acquisition effectuée par un récepteur GPS.

Le bloc de poursuite

La phase d'acquisition a permis de générer des estimées grossières de τ_i et Δf_i du signal reçu par le récepteur pour chaque satellite en vue, et ainsi de générer une réplique proche de ce dernier. Après cette étape, le récepteur passe en mode poursuite [Groves, 2008a, Chap.7.3], ce qui va permettre d'affiner les estimations, de minimiser le bruit et de suivre les évolutions de ces paramètres. En effet les mouvements relatifs entre les satellites et le récepteur induisent constamment des variations des différents paramètres qu'il est nécessaire de poursuivre.

Pour ce faire, soit $\psi \in \{\tau_i, \Delta f_i, \phi_i\}$. On suppose qu'à l'instant m , on a déjà estimé $\widehat{\psi}[m]$. Le récepteur va alors estimer la variation $\Delta\psi[m + N + 1] = \psi[m + N + 1] - \widehat{\psi}[m]$ pour en déduire

$$\widehat{\psi}[m + N + 1] = \widehat{\psi}[m] + \widehat{\Delta\psi}[m + N + 1]. \quad (1.15)$$

Trois boucles sont donc mises en place (une pour chaque paramètre) :

- une DLL pour suivre τ_i
- une FLL pour suivre Δf_i
- une boucle à verrouillage de phase, ou *Phase Lock Loop* (PLL) pour suivre ϕ_i

Le principe de la DLL est similaire à celui de la boucle d'acquisition : le générateur va créer des répliques décalées dans le temps d'une durée $\pm T_b$ du signal reçu à l'instant m , les corréler avec le signal reçu à l'instant $m + N + 1$ pour créer les points de corrélation en avance (*E*, *Early*), prompt (*P*) et en retard (*L*, *Late*) suivants

$$E = r(\mathbf{s}, \mathbf{\Gamma}_{\hat{\tau}_i[m] + T_b}^i) \quad (1.16)$$

$$P = r(\mathbf{s}, \mathbf{\Gamma}_{\hat{\tau}_i[m]}^i) \quad (1.17)$$

$$L = r(\mathbf{s}, \mathbf{\Gamma}_{\hat{\tau}_i[m] - T_b}^i), \quad (1.18)$$

qui vont être fournis en entrée d'un discriminateur de code, dont l'objectif est d'estimer finement le maximum de corrélation, pour en déduire la variation de la correction à appliquer sur l'estimation à l'instant m , la filtrer pour la débruiter à l'aide des estimées des paramètres $\phi_i[m + N + 1]$ et $\Delta f_i[m + N + 1]$, l'intégrer à l'aide d'un oscillateur contrôlé par entrée

numérique, ou *Numerically Controlled Oscillator* (NCO) et fournir cette information au module de calcul de la position et au générateur de réplique. Ce principe est illustré dans la figure 1.8. Il existe aussi des DLL multicorrélateurs, qui calculent par exemple deux points E

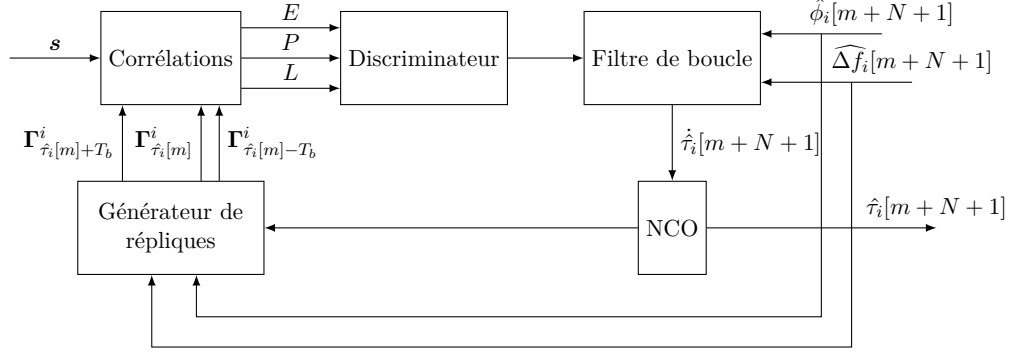


FIGURE 1.8 – Schéma résumant une DLL pour le satellite i .

et deux points L (à $\pm T_b$ et $\pm 2T_b$), comme le corrélateur haute résolution, ou *High Resolution Correlator* (HRC) McGraw et Braash [1999]. La fonction de corrélation des codes C/A peut être approximée par un triangle, comme le montre la figure 1.9. Pour τ fixé, la corrélation

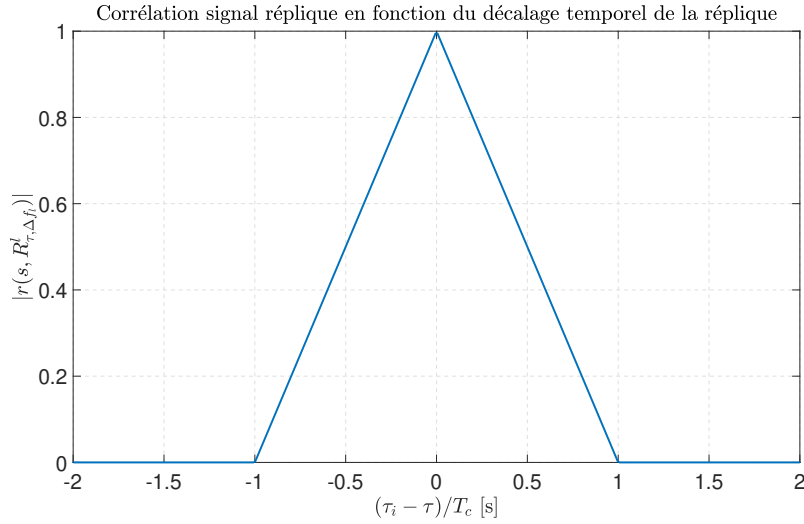


FIGURE 1.9 – Corrélation normalisée entre le signal (temps de propagation τ_i , à estimer) et sa réplique (temps de propagation τ , que l'on peut choisir) en fonction de $(\tau_i - \tau)/T_c$.

vaut alors à un instant m

$$r(\mathbf{s}, \mathbf{\Gamma}_\tau^i) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\tau_i[m+N+1] - \tau|}{T_c}\right) & \text{si } |\tau_i[m+N+1] - \tau| \leq T_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.19)$$

Si on reprend l'expression des points E (1.16), P (1.17) et L (1.18) on en déduit, en supposant que $|\tau_i[m+N+1] - \tau_i[m]| \leq T_c/2$ et $T_b \leq T_c/2$ (afin qu'on ne sorte pas du triangle de corrélation),

$$E = 1 - \frac{|\tau_i[m+N+1] - (\hat{\tau}_i[m] + T_b)|}{T_c} \quad (1.20)$$

$$P = 1 - \frac{|\tau_i[m+N+1] - \hat{\tau}_i[m]|}{T_c} \quad (1.21)$$

$$L = 1 - \frac{|\tau_i[m+N+1] - (\hat{\tau}_i[m] - T_b)|}{T_c} \quad (1.22)$$

soit en notant $\Delta\tau_i[m + N + 1] = \tau_i[m + N + 1] - \hat{\tau}_i[m]$

$$E = 1 - \frac{|\Delta\tau_i[m + N + 1] - T_b|}{T_c} \quad (1.23)$$

$$P = 1 - \frac{|\Delta\tau_i[m + N + 1]|}{T_c} \quad (1.24)$$

$$L = 1 - \frac{|\Delta\tau_i[m + N + 1] + T_b|}{T_c} \quad (1.25)$$

Ces points de corrélation sont ensuite envoyés dans un discriminateur, qui va en déduire la correction $\Delta\tau_i$ bruitée à appliquer. Il existe de très nombreux discriminateurs dans la littérature [Groves, 2008a, Chap.7]; Bhuiyan et Lohan [2010]; Garin et Rousseau [1997]; McGraw et Braash [1999]. Nous nous concentrons ici sur le discriminateur avance retard normalisé, *Normalized Early-Late* [Kaplan et Hegarty, 2006, Chap. 5], que l'on note D_{EL} . La sortie de ce discriminateur de code est définie par

$$D_{\text{EL}} = \frac{1}{2} \frac{E - L}{E + L} \quad (1.26)$$

$$(1.27)$$

que nous avons représentée dans la figure 1.10. Dans l'hypothèse où $|\Delta\tau_i| < T_c/2$, la fonction

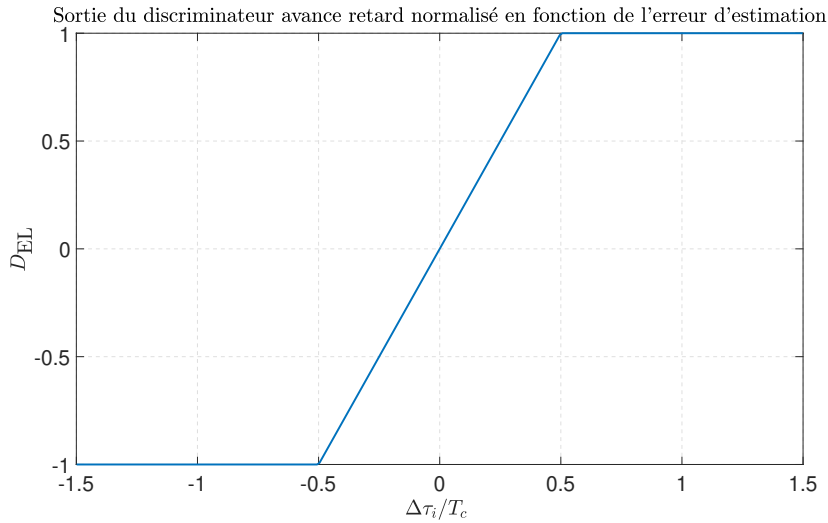
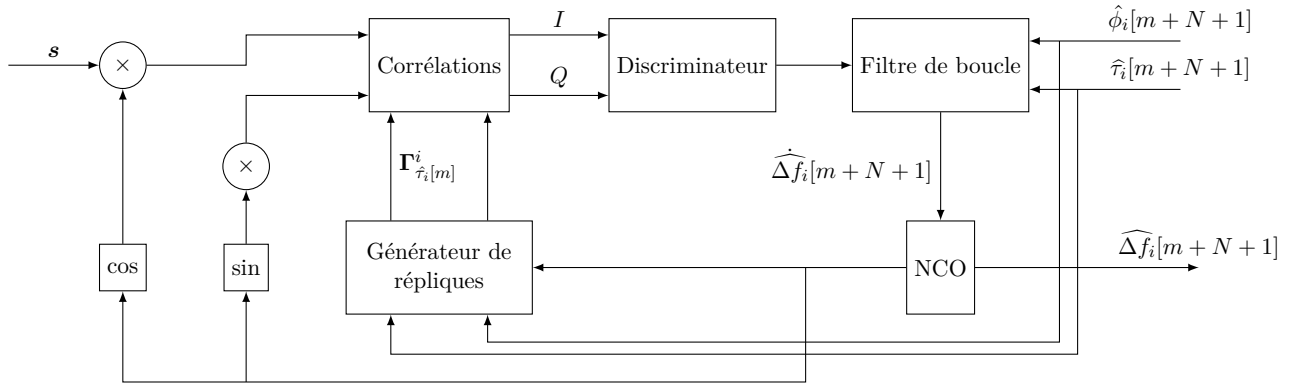


FIGURE 1.10 – Sortie du discriminateur avance retard normalisé en fonction de l'erreur d'estimation.

$D_{\text{EL}}(\Delta\tau_i)$ étant bijective sur cet intervalle, on peut en déduire la correction à appliquer à l'estimation précédente $\widehat{\Delta\tau}_i[m + N + 1]$. Cette variation est ensuite filtrée pour être débruitée, puis est traitée par un NCO pour en déduire $\hat{\tau}_i[m + N + 1]$ [Kaplan et Hegarty, 2006, Chap 5.5].

Le principe de la FLL, est similaire à celui de la DLL. On suppose que le récepteur a pu isoler un satellite et estimer son temps de propagation. La FLL va alors isoler les composantes en phase et en quadrature du signal reçu, pour les corrélérer avec une réplique prompt P , et ainsi créer deux points de corrélation I et Q qui vont passer dans un discriminateur, avant filtrage et intégration. Ce principe est résumé dans la figure 1.11. Une fois de plus, il existe plusieurs discriminateurs [Kaplan et Hegarty, 2006, Chap. 5.3.3], et nous nous limiterons au discriminateur *cross*. Pour ce discriminateur, la boucle crée deux points de corrélations I et Q à deux instants différents successifs t_1 et $t_2 = t_1 + T_i$ correspondant à une durée d'intégration.

FIGURE 1.11 – Schéma résumant une FLL pour le satellite i .

On a alors

$$I(t_1) = \cos(2\pi\Delta f_1 t_1) \quad (1.28)$$

$$I(t_2) = \cos(2\pi\Delta f_2 t_2) \quad (1.29)$$

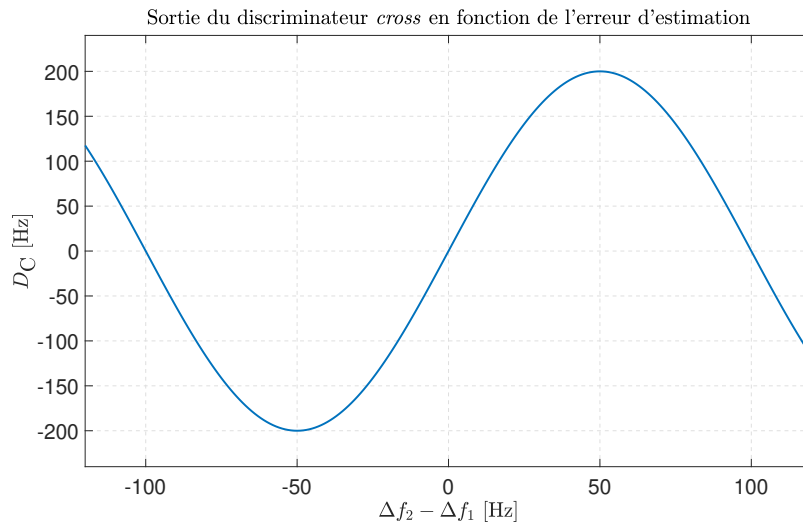
$$Q(t_1) = \sin(2\pi\Delta f_1 t_1) \quad (1.30)$$

$$Q(t_2) = \sin(2\pi\Delta f_2 t_2). \quad (1.31)$$

La sortie du discriminateur est alors donnée par

$$\begin{aligned} D_c &= \frac{I(t_1)Q(t_2) - I(t_2)Q(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\cos(2\pi\Delta f_1 t_1) \sin(2\pi\Delta f_2 t_2) - \cos(2\pi\Delta f_2 t_2) \sin(2\pi\Delta f_1 t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\sin(2\pi(\Delta f_2 - \Delta f_1)(t_2 - t_1))}{t_2 - t_1} \end{aligned} \quad (1.32)$$

que nous avons représentée dans la figure 1.12. Ensuite, la sortie est filtrée puis intégrée afin

FIGURE 1.12 – Sortie du discriminateur *cross* fonction de l'erreur d'estimation ($t_2 - t_1 = T_i = 10$ ms).

d'en déduire l'erreur d'estimation de la même manière que dans une DLL.

Comme nous ne nous intéresserons qu'aux mesures relatives à τ_i et Δf_i , ne nous attarderons pas sur la PLL, dont le principe reste le même que la DLL et FLL. Nous verrons dans la partie 1.3.5 comment le récepteur déduit de ces estimations des mesures liées aux paramètres d'intérêt relatifs à sa position.

1.2.2 Galileo

Le développement du système de positionnement européen a commencé en 1999 (juste avant que le gouvernement américain décide d'enlever la SA). Son premier satellite a été lancé en 2005, et on compte aujourd'hui 18 satellites opérationnels et 4 en cours de recette. A terme, il devrait y avoir en février 2019 22 satellites opérationnels². Le système devrait devenir complètement opérationnel d'ici 2020 lorsque 24 satellites seront opérationnels. Contrairement au GPS, Galileo propose 4 services depuis décembre 2017 :

- *Open Service* (OS), l'équivalent du service SPS, destiné aux particuliers (gratuit)
- *Commercial Service* (CS), qui proposera une précision supérieure au service précédent, mais nécessitant un abonnement
- *Public Regulated Service* (PRS), qui proposera un service plus robuste (disponibilité, cryptage, anti-brouillage), destiné aux services publics qui en ont besoin
- *Search And Rescue* (SAR), permettant de localiser les balises Cospas-Sarsat et aider les utilisateurs en détresse

1.2.2.1 Segment spatial Galileo

Les satellites Galileo orbitent sur une MEO à 23222 km d'altitude, pour une période de révolution de 14h21min. Chaque satellite va émettre 6 signaux différents, sur 3 bandes de fréquences : E1, E5 et E6. La principale différence entre le signal GPS public C/A et le signal Galileo public OS réside dans la modulation de l'information. En effet, le GPS utilise une modulation BPSK alors que Galileo utilise une modulation à décalage de porteuse à deux états composite, ou *Composite Binary Offset Carrier* (CBOC), dont le fonctionnement est détaillé par exemple dans Julien et al. [2006].

1.2.2.2 Segment sol Galileo

Le segment sol est constitué de deux types d'infrastructures [Groves, 2008a, Chap. 6.4.1], ESA [2014], réparties comme le montre la figure 1.13 :

- le segment sol de contrôle Galileo, ou *Ground Control Segment* (GCS)
 - 2 centres de contrôle (Oberpfaffenhofen et Fucino). Ces stations enregistrent les signaux émis par les satellites de la constellation et envoient aux stations de transmission les informations à transmettre aux satellites
 - 5 stations de télémétrie, poursuite et contrôle, ou *Telemetry, Tracking and Control* (TT&C) (Kiruna, Kourou, Nouméa, Sainte-Marie, Réunion et Redu) qui maintiennent les liaisons de télécommande et télémétrie avec les satellites
- le segment sol de mission Galileo, ou *Ground Mission Segment* (GMS)
 - 2 centres de mission (Oberpfaffenhofen et Fucino). Ces stations sont co-localisées avec les centres de contrôle, et leur rôle est de calculer les orbites, les informations d'intégrité, de créer le message de navigation, de fournir les informations de temps Galileo, de surveiller le système et de mesurer les performances des services
 - une dizaine de stations dédiées à la transmission des informations vers les satellites
 - une trentaine de stations dédiées à la surveillance des signaux Galileo.

1.2.2.3 Segment utilisateur Galileo

Le segment utilisateur Galileo fonctionne de manière identique à celui du GPS qui a été exposé dans la partie 1.2.1.3, la principale différence étant la démodulation des signaux. Nous ne rentrerons donc pas plus dans les détails dans cette partie.

2. <https://www.gsc-europa.eu/system-status/Constellation-Information>



FIGURE 1.13 – Répartition des stations sol Galileo, d'après [ESA \[2014\]](#)

1.2.3 GLONASS

GLONASS est à la base le système de navigation militaire soviétique, mis en place au milieu des années 1970, pour concurrencer le système américain GPS. Son premier satellite a été lancé en 1982, et le système devient totalement opérationnel en 1995 (alors géré par la Russie). Cependant, la crise financière et économique qui touche la Russie au même moment va l'obliger à limiter le lancement de nouveaux satellites et l'entretien des anciens, ce qui se traduit par 7 satellites en 2001. Cependant, cette même année la Russie décide de lui donner une deuxième vie, pour arriver à 24 satellites au cours des années 2010.

1.2.3.1 Segment spatial GLONASS

La constellation GLONASS est constituée de 24 satellites (dont 3 de secours). Ces satellites orbitent à une altitude de 19100 km pour une période de 11h15min. Le signal civil GLONASS est aussi situé dans la bande L_1 , et la principale différence avec GPS et Galileo réside dans la discrimination des satellites : là où les deux derniers utilisent un CDMA, GLONASS utilise un accès multiple par répartition en fréquence, ou *Frequency Division Multiple Access* (FDMA), c'est à dire qu'au lieu que les signaux soient envoyés à la même fréquence L_1 , chaque satellite k envoie un signal à la fréquence f_k (à savoir $f_k = 1602 + 0.5625k$ MHz). Cependant, pour le futur de GLONASS il est envisagé d'utiliser la CDMA.

1.2.3.2 Segment sol GLONASS

Le segment de contrôle de GLONASS est en majorité situé en Russie [Navipedia \[2011\]](#), comme le montre la figure 1.14. Il est constitué de

- un centre de contrôle système (Krasnoznamensk)
- 5 stations TT&C (Schelkovo, Komsomoisk, Saint-Petersbourg, Ussuriysk et Yenisseisk), chargées d'envoyer les commandes aux satellites et de mesurer leurs orbites
- une horloge centrale (Schelkovo), chargée de calibrer les horloges satellites
- 3 stations de téléversement (Yenisseisk, Komsomoisk, Schelkovo)
- 2 stations de télémétrie laser (Schelkovo, Komsomoisk)
- 4 stations de surveillance et mesures (Schelkovo, Krasnoznamensk, Yenisseisk, Komsomoisk).

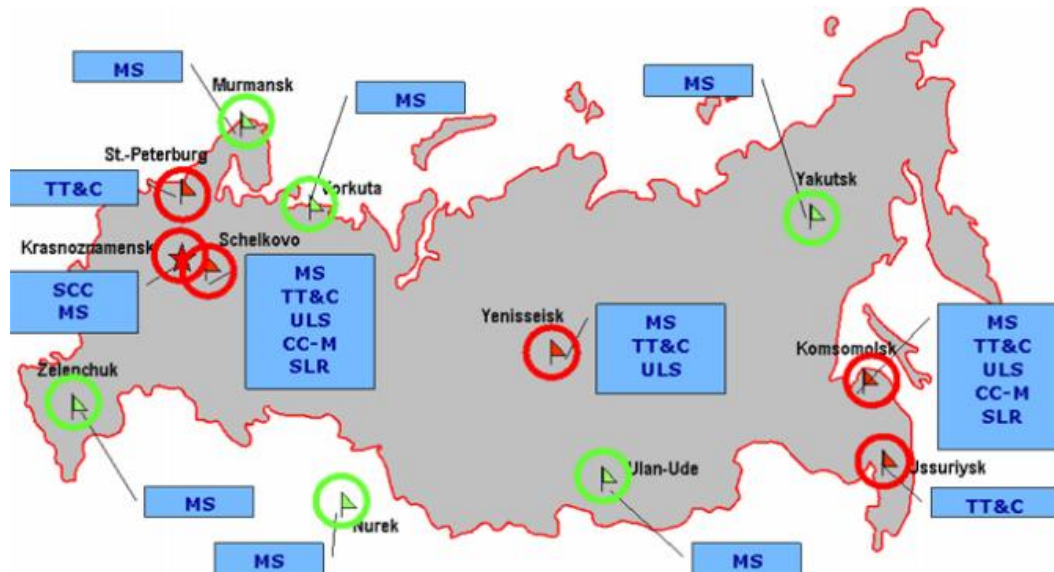


FIGURE 1.14 – Répartition des stations sol GLONASS, d'après Navipedia [2011]

1.2.3.3 Segment utilisateur GLONASS

Le segment utilisateur GLONASS fonctionne de manière identique à celui du GPS qui a été exposé dans la partie 1.2.1.3, la principale différence étant la démodulation des signaux. Nous ne rentrerons donc pas plus dans les détails dans cette partie.

1.2.4 Compass-Beidou

Le projet Beidou a vu le jour en 1983 et est à la base un programme d'augmentation locale destiné à la Chine. Cependant, en 2007, la Chine de lancer son propre GNSS, à savoir Compass, qui utilise les satellites géostationnaires de Beidou et trente satellites MEO, dont le premier a été mis sur orbite en 2007. Le système devrait devenir complètement opérationnel d'ici 2020. Tout comme GPS et GLONASS, Compass propose une solution civile et une solution militaire. Il y a peu d'informations sur ce système qui est toujours en cours de développement. Le segment spatial de Compass comprendra 27 satellites MEO à une altitude de 21000km pour une période de révolution de 12h, 5 satellites sur orbite géostationnaire (GEO) et 3 satellites sur GEO inclinée.

Il faut noter qu'il existe d'autres systèmes GNSS mais destinés à un usage local, comme IRNSS en Inde et QZSS au Japon.

1.2.5 Les systèmes d'augmentation

Afin d'améliorer la précision des différents systèmes de navigation, des systèmes d'augmentations voient le jour afin de les compléter. Ces systèmes reposent sur le principe du GNSS différentiel : une (ou plusieurs) stations de référence, i.e., dont on connaît exactement la position et les différents paramètres l'entourant, vont fournir des corrections aux récepteurs GNSS en temps réels. Il existe deux types de systèmes d'augmentation

- les systèmes terrestres d'augmentation, ou *Ground Based Augmentation Systems* (GBAS), très locaux, comme dans les aéroports ou l'autoguidage pour l'agriculture
- les SBAS, qui sont des systèmes régionaux tels que par exemple
 - l'européen, *European Geostationary Navigation Overlay Service* (EGNOS)
 - l'américain, *Wide Area Augmentation System* (WAAS)
 - le japonais, *Quasi-Zenith Satellite System* (QZSS)
 - l'indien, *GPS Aided Geo Augmented Navigation* (GAGAN)

1.3 Positionnement

1.3.1 La trilatération

Le principe fondamental de la navigation par satellite est la trilatération qui utilise les positions de différentes balises, ainsi que les distances qui séparent le point à localiser. Ce principe est illustré dans la figure 1.15. Comme l'intersection de trois sphères de l'espace est un ensemble constitué de deux points, si on connaît la position de 3 balises et la distance à laquelle elles se trouvent d'un objet à positionner, cet objet se trouvera à l'un des deux points constituant l'intersection des trois sphères. Dans le cas du positionnement par satellites, on a en plus la contrainte que ce point appartient à la Terre, et non à l'espace, et on peut donc identifier la bonne solution. Pour un objet en mouvement, on peut aussi calculer sa vitesse en dérivant les équations du problème précédent, i.e., en supposant connues les vitesses des 3 balises ainsi que les vitesses relatives entre chacune des balises et l'objet à positionner, on peut en déduire sa vitesse. Comme dit à la partie 1.2.1.1, le récepteur peut calculer la

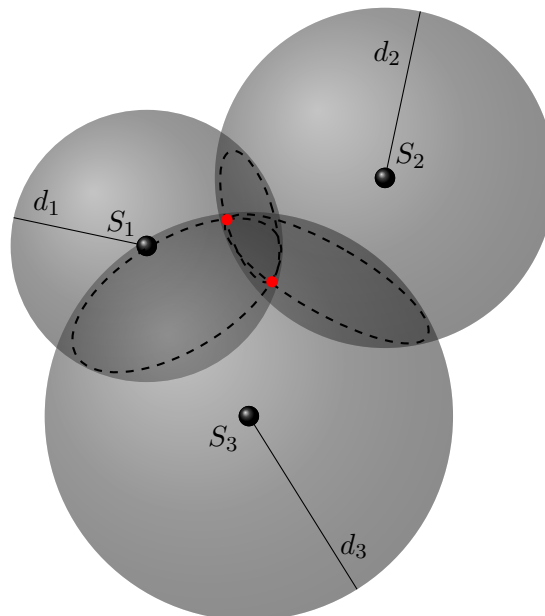


FIGURE 1.15 – Principe de trilatération : on suppose que 3 balises, resp. S_1, S_2, S_3 , entourent un objet à positionner et qu'on connaît les distances qui les séparent de cet objet, resp. d_1, d_2, d_3 . Une distance réduit l'espace à une sphère, 2 à un cercle et 3 à deux points (en rouge). Si on cherche à positionner un objet sur Terre, l'ambiguïté sur les deux points peut être levée (un des deux points sera dans l'espace).

position et la vitesse de chacun des satellites dont il reçoit les signaux. Il reste maintenant à voir comment il peut retrouver la distance qui le sépare de chaque satellite et la vitesse relative qu'il a avec chacun d'eux. Ceci se fait en utilisant les paramètres τ_i et Δf_i estimés à la partie 1.2.1.3.

1.3.2 Etat du satellite

Le calcul de l'état (position et vitesse) du satellite à un instant donné est possible via les paramètres transmis dans les éphémérides et accessibles à l'utilisateur. A partir de ces différents paramètres, on peut recalculer l'orbite du satellite ainsi que la position du satellite dans cette orbite pour enfin en déduire l'expression des vecteurs position, \mathbf{r}_i , et vitesse, \mathbf{v}_i , dans le repère qui nous intéresse. Les expressions détaillées de ces calculs sont données dans l'annexe A.1. Nous allons cependant définir ici quelques notions indispensables à l'utilisation de satellites dans les calculs.

1.3.2.1 Les différents repères

Il existe principalement deux référentiels géocentriques utilisés en GNSS : le ECEF et le repère géocentrique inertiel, ou *Earth Centered Inertial* (ECI). La différence entre ces deux repères, est que le premier tourne à la vitesse de la Terre (elle est donc immobile dans ce repère), et le deuxième est galiléen. Plus de détails sur ces repères, ainsi que d'autres repères, peuvent être trouvés dans [Groves, 2008a, Chap. 2.1]. On peut aussi être parfois amené à travailler dans un repère local (lié à l'utilisateur). Il en existe deux (équivalents) : le ENU et le repère local nord, est, bas, ou *North East Down* (NED). Dans la suite nous utiliserons le repère ENU. Pour passer d'un repère global à un repère local, il nous faut définir la latitude (ϕ) et la longitude (λ), comme sur la figure 1.16. Les calculs pour trouver la latitude et la longitude sont donnés dans l'annexe A.2. Pour faire le changement de repère, il faut alors appliquer deux rotations dans le sens qui convient (ce qui est clair en regardant la figure 1.16 à droite). Ce qui donne pour tout vecteur \mathbf{x}_{ECEF} exprimé dans le repère ECEF

$$\mathbf{x}_{\text{ENU}} = \mathbf{R}_1 \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \mathbf{R}_3 \left(\frac{\pi}{2} + \lambda \right) \mathbf{x}_{\text{ECEF}} \quad (1.33)$$

où la matrice $\mathbf{R}_i(\theta)$ désigne la matrice de rotation autour de l'axe i d'angle θ

$$\mathbf{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

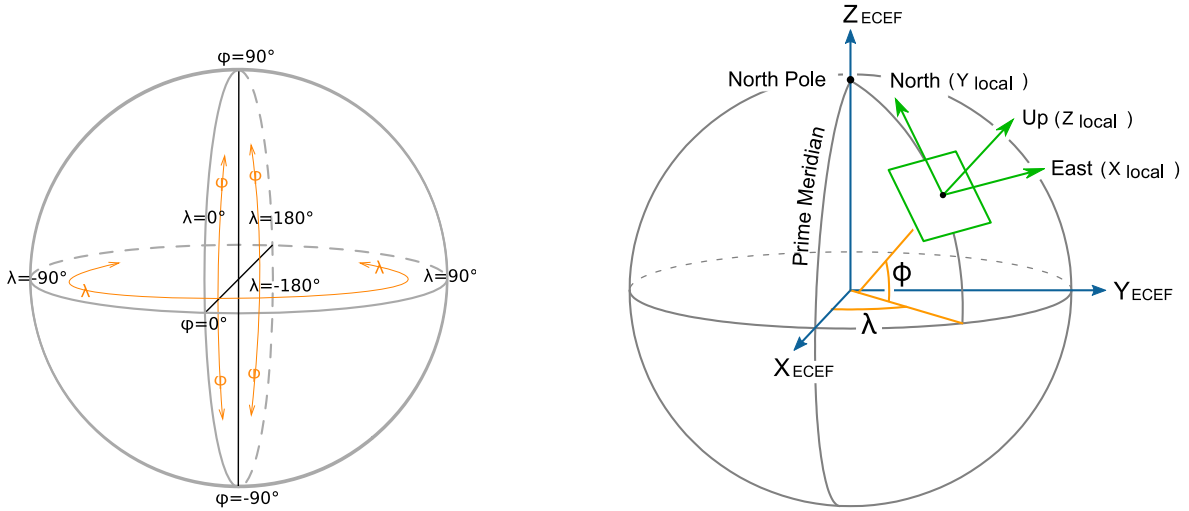


FIGURE 1.16 – Définition de latitude (ϕ) et de longitude (λ), et comment passer du repère ECEF au repère local ENU (Wikipédia : Coordonnées Géographiques). ATTENTION : selon la référence, les notations peuvent être échangées (c'est le cas par exemple dans Farrell et Barth [1999]).

1.3.2.2 Les angles d'azimut et d'élévation

Soit \mathbf{a}_i le vecteur unitaire partant du récepteur et pointant vers le satellite i (cf., (1.39)). Par définition, l'azimut ψ_i est l'angle que fait ce vecteur avec le plan (North, Up) dans le sens horaire autour de l'axe Up, et l'élévation θ_i l'angle qu'il fait avec le plan (North, East) dans le sens antihoraire autour de l'axe East, comme montré sur la figure 1.17. Les calculs pour obtenir ces deux angles sont donnés dans l'annexe A.3.

1.3.3 Les paramètres d'intérêt

Nous venons de voir que pour calculer sa position, le récepteur va devoir former des mesures à partir des paramètres τ_i et Δf_i qu'il a estimés afin d'inverser le problème. Nous

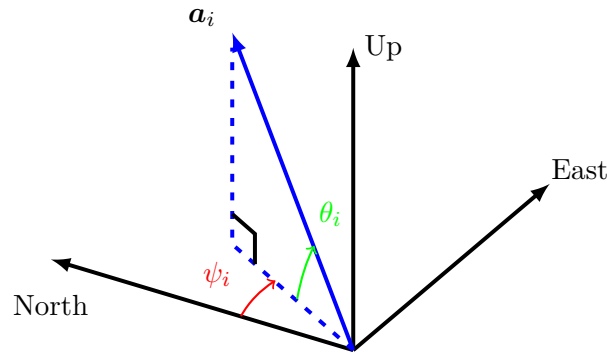


FIGURE 1.17 – Définition de l'angle d'azimut ψ_i et de l'angle d'élévation θ_i dans le repère local ENU (d'après [Groves, 2008a, Chap. 7.1.3]).

allons donc expliquer comment ces paramètres dépendent de la position et de la vitesse du récepteur.

1.3.3.1 Le temps de propagation τ_i

Le temps de propagation représente la durée pendant laquelle le signal envoyé par le satellite a traversé l'espace avant d'arriver au récepteur. Comme on sait que les différents signaux se propagent à la vitesse c , on a

$$d_i = c \times \tau_i. \quad (1.35)$$

où d_i désigne la distance entre le récepteur et le satellite i . Comme le récepteur peut calculer la position de chaque satellite, on dispose des informations nécessaires pour effectuer une triangulation, comme expliqué dans la figure 1.15. D'autre part, en notant \mathbf{r} la position du récepteur dans un repère à 3 dimensions, et \mathbf{r}_i la position du satellite i dans un même repère à 3 dimensions, alors la distance d_i s'écrit

$$d_i = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|_2, \quad (1.36)$$

d'où

$$\tau_i = \frac{1}{c} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|_2. \quad (1.37)$$

où \mathbf{r} désigne la position cherchée. Cependant, le temps de propagation estimé va être différent du temps de propagation réel, à cause de plusieurs sources d'erreurs qui seront présentées dans la partie 1.3.4. Il faut donc corriger les mesures avant de pouvoir estimer au mieux la distance réelle qui sépare le récepteur du satellite en question.

1.3.3.2 Le décalage fréquentiel Δf_i

Le décalage fréquentiel est en réalité dû à l'effet Doppler [Doppler \[1842\]](#) et au fait que l'émetteur et le récepteur ont deux vecteurs vitesses différents. La formule reliant le décalage fréquentiel à la vitesse relative entre le récepteur et un satellite est

$$-\lambda_{L_1} \Delta f_i = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})^T \mathbf{a}_i \quad (1.38)$$

avec

- λ_{L_1} la longueur d'onde correspondant à la fréquence L_1
- \mathbf{v}_i le vecteur vitesse du satellite i
- \mathbf{v} le vecteur vitesse du récepteur
- \mathbf{a}_i le vecteur unitaire allant du récepteur vers le satellite i

dont la démonstration est dans l'annexe A.4. On peut remarquer que l'on a

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|_2}. \quad (1.39)$$

En général, pour avoir \mathbf{a}_i , on utilise une approximation de la position de l'utilisateur et on utilise (1.39). Tout comme le temps de propagation, le décalage fréquentiel estimé va être différent du décalage réel, à cause de plusieurs sources d'erreurs qui seront présentées dans la partie 1.3.4. Il faudra donc corriger les mesures avant de pouvoir estimer au mieux la vitesse relative réelle entre le récepteur et le satellite en question.

1.3.4 Sources d'erreur

Les paramètres d'intérêt τ_i et Δf_i n'ont en réalité pas la même expression que celles données aux équations (1.37) et (1.38). En effet, le temps de propagation estimé par le récepteur est très différent du temps de propagation correspondant à la distance entre le satellite et le récepteur, et de même pour le décalage fréquentiel et les vitesses relatives, à cause de plusieurs types d'erreurs [Kaplan et Hegarty, 2006, Chap. 7.2]

- les erreurs dues au satellite
- les erreurs dues à la propagation
- les erreurs dues à l'environnement de réception
- les erreurs dues au récepteur.

1.3.4.1 Les erreurs dues au satellite

Malgré leurs précisions atomiques et les corrections apportées par les stations de contrôle, les horloges satellites souffrent d'une dérive par rapport au temps de référence. Donc la date transmise dans le signal va être différente de la date à laquelle a été émis réellement le signal. Nous notons δt_{S_i} le biais d'horloge du satellite i . Il en est de même pour la position du satellite. En effet, une des hypothèses fondamentales de la triangulation est que l'observateur connaît parfaitement la localisation des différentes sources. Or, le satellite transmet seulement des paramètres permettant au récepteur de calculer lui-même la position du satellite à l'instant voulu. Cependant ces calculs résultent d'interpolation imparfaites, venant introduire une erreur sur l'estimation de la position du satellite, et donc sur la mesure. Nous notons $\delta t_{\text{eph},i}$ le retard induit par cette erreur. Enfin, étant données les orbites des différents satellites ($\approx 20000\text{km}$), il faut tenir compte des effets relativistes qui vont venir modifier le temps de propagation. Nous notons $\delta t_{\text{rel},i}$ la contribution de ces erreurs à l'erreur d'estimation du temps de propagation.

1.3.4.2 Les erreurs dues à la propagation

L'atmosphère est constituée de différentes couches, mais seulement deux vont venir perturber les signaux GNSS [Groves, 2008a, Chap. 7.4.2]. Tout d'abord, ils vont pénétrer l'ionosphère (située entre 50 et 1000 km au dessus de la surface de la Terre) qui est constituée de molécules de gaz qui vont être ionisées par les rayons ultraviolets du soleil. Ces molécules vont alors dégager des nuages d'électrons libres qui vont rendre ce milieu dispersif, c'est à dire que la vitesse de propagation des ondes qui la traverse va dépendre de leurs fréquences. Ainsi, les signaux GNSS vont être ralentis dans cette couche. Nous notons $\delta t_{\text{iono},i}$ le retard de propagation induit par l'ionosphère sur le signal du satellite i . Ensuite, ils vont traverser la troposphère (située jusqu'à 16km au dessus de la surface de la Terre), qui est constituée de gaz secs et de vapeur d'eau, qui vont rallonger le chemin de propagation à cause des réfractions qu'ils engendrent. Nous notons $\delta t_{\text{tropo},i}$ le retard de propagation induit par la troposphère sur le signal du satellite i .

1.3.4.3 Les erreurs dues à l'environnement de réception

Au plus proche du récepteur, il peut intervenir encore deux types d'erreurs

- les multitrajets [Groves, 2008a, 7.4.4], voir figure 1.18, qui sont les éventuelles réflexions que subit le signal avant d'arriver au récepteur, et qui sont le problème sur lequel nous allons le plus nous concentrer dans cette thèse. Nous notons $\delta t_{\text{MP},i}$ l'erreur sur le retard de propagation engendrée par les éventuels multitrajets qu'a subi le signal du satellite i
- les interférences, qui sont des actions provoquées par d'autres ondes environnantes, volontaires ou non, sur lesquels ne nous attarderons pas mais qu'il est nécessaire de mentionner.

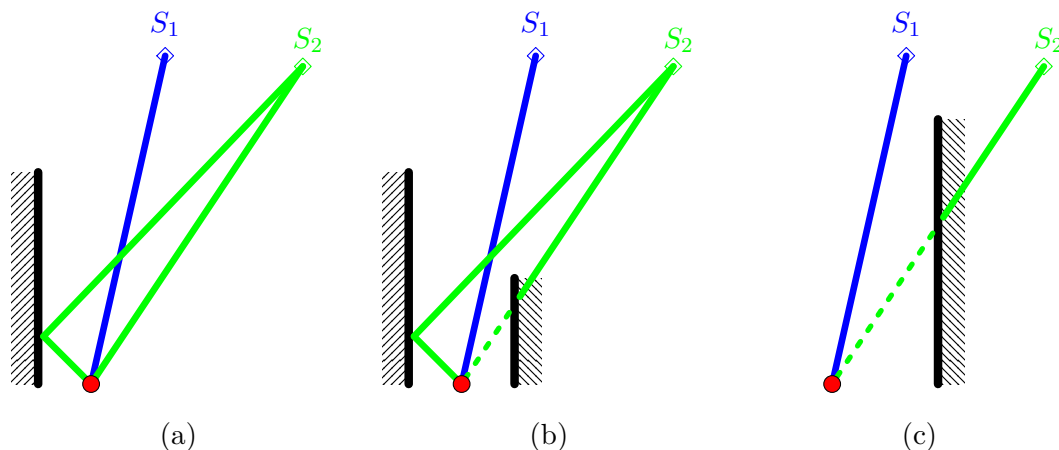


FIGURE 1.18 – Illustrations de l'impact géométrique de l'environnement sur les signaux GNSS : dans tous les cas, le signal reçu par le récepteur (en rouge) issu de S_1 est le LOS. Dans (a), le signal reçu émis par S_2 est la somme du LOS et du NLOS, dans (b), le signal reçu émis par S_2 n'est que le NLOS, et dans (c), le signal émis par S_2 n'est pas reçu (masquage).

1.3.4.4 Les erreurs dues au récepteur

De même que pour les horloges satellites, les horloges dans les récepteurs ne sont pas synchronisées sur le temps GPS, et sont moins précises que les horloges satellites par soucis de coût (dérive d'horloge). Un biais commun à toutes les mesures de temps de propagation va donc venir s'ajouter, que nous notons δt_R . D'autre part, un bruit de mesure dû à l'électronique va aussi venir s'ajouter et fausser le temps de propagation estimé. Nous le notons $\delta t_{\text{bruit},i}$ pour le satellite i .

1.3.4.5 Conclusion

Toutes les erreurs présentées auparavant interviennent comme représentées sur la figure 1.19 avec :

- t_{S_i} la date réelle d'émission du signal par le satellite i
- δt_{S_i} le biais d'horloge du satellite i
- $\delta t_{\text{rel},i}$ l'erreur due à la relativité pour le satellite i
- $t_{S_i} + \delta t_{S_i} + \delta t_{\text{rel},i}$ la date d'émission du signal par le satellite i transmise dans le message de navigation
- $t_{S_i} + \tau_i$ la date correspondant à une d'émission t_{S_i} et un temps de parcours τ_i (correspondant à la distance géométrique entre le satellite i et le récepteur)

- $\delta t_p = \delta t_{\text{eph},i} + \delta t_{\text{iono},i} + \delta t_{\text{tropo},i} + \delta t_{\text{MP},i} + \delta t_{\text{bruit},i}$ la contribution de toutes les erreurs de propagation, d'environnement de bruit et présentées précédemment
- t_R la date réelle de réception du signal
- δt_R le biais d'horloge du récepteur
- $t_R + \delta t_R$ la date de réception estimée par le récepteur.

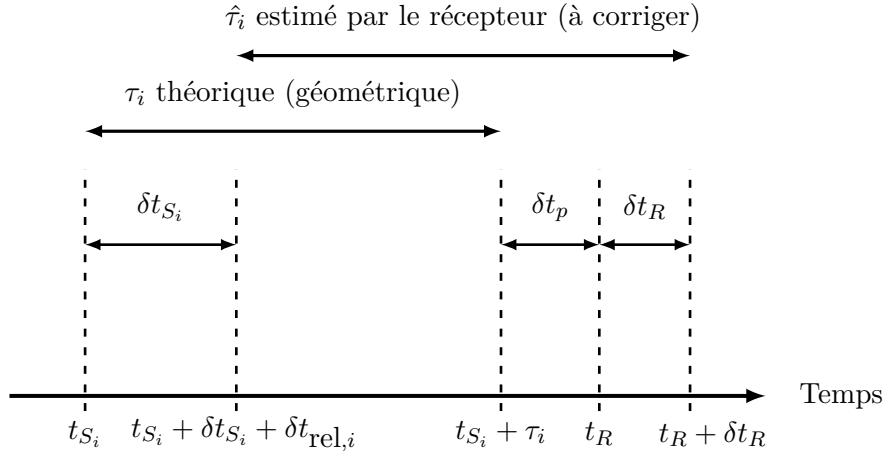


FIGURE 1.19 – Relation entre la différents instants et retards (d'après [Kaplan et Hegarty, 2006, Chap. 7.2]).

1.3.5 Les mesures

Les mesures GNSS auxquelles nous allons nous intéresser dans cette thèse sont les pseudodistances et les dérivées de pseudodistances (ou pseudovitesse).

1.3.5.1 Les pseudodistances

Comme leur nom l'indique, les pseudodistances sont liées aux distances géométriques qui séparent le récepteur des différents satellites qu'il a en vue. Pour former ces mesures, le récepteur utilise le temps de propagation estimé d'un satellite, et connaissant la vitesse de l'onde, le transforme en mesure de distance, i.e., pour le satellite i ,

$$\rho_i = c \times \hat{\tau}_i. \quad (1.40)$$

En reprenant la figure 1.19, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_i &= t_R + \delta t_R - (t_{S_i} + \delta t_{S_i} + \delta t_{\text{rel},i}) \\ &= t_R + \delta t_R - (t_{S_i} + \delta t_{S_i} + \delta t_{\text{rel},i}) + (t_{S_i} + \tau_i) - (t_{S_i} + \tau_i) \\ &= \tau_i + \underbrace{t_R - (t_{S_i} + \tau_i)}_{\delta t_p} + \delta t_R - t_{S_i} - \delta t_{S_i} - \delta t_{\text{rel},i} + t_{S_i} \\ &= \tau_i + \delta t_p + \delta t_R - (\delta t_{S_i} + \delta t_{\text{rel},i}) \end{aligned} \quad (1.41)$$

et donc avec (1.40)

$$\begin{aligned} \rho_i &= \underbrace{c \times \tau_i}_{d_i} + \underbrace{c \times \delta t_R}_{b} + c \times \delta t_p - c \times \delta t_{S_i} \\ &= d_i + b + c \times (\delta t_{\text{eph},i} + \delta t_{\text{iono},i} + \delta t_{\text{tropo},i} + \delta t_{\text{MP},i} + \delta t_{\text{bruit},i}) - c \times (\delta t_{S_i} + \delta t_{\text{rel},i}) \\ &= d_i + b - \varepsilon_{t_i} - \varepsilon_{\text{rel},i} + \varepsilon_{\text{eph},i} + \varepsilon_{\text{iono},i} + \varepsilon_{\text{tropo},i} + m_i + \varepsilon_{n,i} \end{aligned} \quad (1.42)$$

avec

- b le biais d'horloge récepteur
- ε_{t_i} le biais d'horloge satellite
- $\varepsilon_{\text{eph},i}$ l'erreur de pseudodistance due aux éphémérides
- $\varepsilon_{\text{rel},i}$ l'erreur de pseudodistance due à la relativité
- $\varepsilon_{\text{iono},i}$ l'erreur de pseudodistance due à l'ionosphère
- $\varepsilon_{\text{tropo},i}$ l'erreur de pseudodistance due à la troposphère
- m_i l'erreur de pseudodistance due aux multitrajets
- $\varepsilon_{n,i}$ le bruit de mesure pseudodistance.

1.3.5.2 Les pseudovitesse

Ces mesures sont liées aux vitesses relatives entre le récepteur et les différents satellites dont il reçoit le signal. Pour former ces mesures, il va utiliser les estimations de décalages Doppler $\widehat{\Delta f}_i$ à l'aide de la formule (1.38) et en remarquant

$$d_i = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r})^T \mathbf{a}_i \quad (1.43)$$

que l'on peut dériver en supposant les variations faibles de \mathbf{a}_i ³

$$\dot{d}_i = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})^T \mathbf{a}_i \quad (1.44)$$

on définit alors les mesures de pseudovitesse

$$\dot{\rho}_i = -\lambda_{L_1} \times \widehat{\Delta f}_i. \quad (1.45)$$

On a alors

$$\dot{\rho}_i = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})^T \mathbf{a}_i + \dot{b} - \dot{\varepsilon}_{t_i} - \dot{\varepsilon}_{\text{rel},i} + \dot{\varepsilon}_{\text{eph},i} - \dot{\varepsilon}_{\text{iono},i} + \dot{\varepsilon}_{\text{tropo},i} + \dot{m}_i + \dot{\varepsilon}_{n,i} \quad (1.46)$$

avec

- \dot{b} la dérive d'horloge récepteur
- $\dot{\varepsilon}_{t_i}$ la dérive d'horloge satellite
- $\dot{\varepsilon}_{\text{rel},i}$ l'erreur de pseudovitesse due à la relativité
- $\dot{\varepsilon}_{\text{eph},i}$ l'erreur de pseudovitesse due aux éphémérides
- $\dot{\varepsilon}_{\text{iono},i}$ l'erreur de pseudovitesse due à l'ionosphère (le changement de signe vient de la manière dont l'ionosphère affecte la fréquence différemment du temps de propagation [Klobuchar \[1991\]](#))
- $\dot{\varepsilon}_{\text{tropo},i}$ l'erreur de pseudovitesse due à la troposphère
- \dot{m}_i l'erreur de pseudovitesse due aux multitrajets
- $\dot{\varepsilon}_{n,i}$ le bruit de mesure pseudovitesse.

Afin d'exploiter au mieux les mesures présentées dans cette partie, nous devons voir comment estimer chacun des membres de droites des équations (1.42) et (1.46) autres que \mathbf{r} , \mathbf{v} , b et \dot{b} qui sont les paramètres que l'on cherche.

1.4 Correction des sources d'erreurs

Nous avons vu à la partie 1.3.5 que les signaux traités par les récepteur GNSS souffraient de plusieurs types d'erreurs. Nous présentons maintenant les méthodes qui permettent de limiter l'impact de ces erreurs.

3. ce qui est supposé par exemple dans [[Groves, 2008b](#), Chap. 7.5.2]

1.4.1 Biais d'horloge satellite

Pour corriger les biais d'horloge satellite, des coefficients d'interpolation ($a_{f_0,i}$, $a_{f_1,i}$ et $a_{f_2,i}$), le biais matériel $t_{GD,i}$ du satellite i (*Group Delay*), ainsi que la date t_{oc} autour de laquelle il faut effectuer cette interpolation, sont transmis dans les éphémérides

$$\hat{\varepsilon}_{t_i} = (a_{f_0,i} + a_{f_1,i}(t_{S_i} - t_{oc}) + a_{f_2,i}(t_{S_i} - t_{oc})^2 - t_{GD,i}) \times c \quad (1.47)$$

dont on déduit la dérivée en fonction du temps

$$\hat{\varepsilon}_{t_i} = (a_{f_1,i} + 2a_{f_2,i}(t_{S_i} - t_{oc})) \times c. \quad (1.48)$$

1.4.2 Relativité

La relativité va venir fausser les mesures de plusieurs façons. Tout d'abord, la rotation de la Terre est à prendre en compte durant la propagation du signal. C'est ce qu'on appelle l'effet Sagnac [Groves, 2008a, Chap. 7.1.2]. Il existe plusieurs manières de corriger cet effet. Soit on corrige directement le retard estimé à l'aide d'un terme correctif, soit en faisant coïncider les repères ECI et ECEF à la date d'arrivée du signal dans l'expression de la distance d_i , ce qui va nous donner directement une distance pour laquelle l'effet Sagnac a été corrigé $d_{i,\text{Sagnac}}$. Dans ce cas, la position du récepteur est la même dans les deux repères, et pour trouver la position du satellite dans le repère inertiel (qui prend donc en compte la rotation de la Terre), on multiplie simplement la position \mathbf{r}_i dans le repère ECEF par la matrice de rotation \mathbf{C}_{ie} (cf., (A.2)), i.e.,

$$d_{i,\text{Sagnac}} = \|\mathbf{C}_{ie}\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|_2 \quad (1.49)$$

et donc en dérivant cette expression par rapport au temps, en tenant compte que le repère ECEF est non-galiléen et qu'il faut donc considérer sa vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}_{ie}$, on obtient

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{v})_{\text{Sagnac}}^T \mathbf{a}_i = [\mathbf{C}_{ie}(\mathbf{v}_i + \boldsymbol{\Omega}_{ie}\mathbf{r}_i) - (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}_{ie}\mathbf{r})]^T \mathbf{a}_i. \quad (1.50)$$

Il faut aussi tenir compte de la correction de l'excentricité pour l'horloge satellite. En effet, la vitesse de l'horloge va dépendre de l'excentricité de l'orbite du satellite (au périhélie, le satellite va plus vite, et son horloge moins, et inversement à l'apogée Zhang [2007]). On a alors NAVSTAR [2018]

$$\hat{\varepsilon}_{\text{rel},i} = -2\frac{\sqrt{\mu}}{c}e\sqrt{A}\sin(E_k) \quad (1.51)$$

où les différents termes sont définis dans A.1, et donc en dérivant par rapport au temps, on obtient

$$\hat{\varepsilon}_{\text{rel},i} = -2\frac{\sqrt{\mu}}{c}e\sqrt{A}\dot{E}_k \cos(E_k) \quad (1.52)$$

1.4.3 Erreurs dues aux éphémérides

Le calcul de la position à l'aide des paramètres transmis par les éphémérides génère une position différente de la position réelle. Il n'existe pas de modèle permettant de corriger ces erreurs, mais on peut utiliser des informations extérieures, comme les fichiers SP3, qui fournissent des orbites haute précision des satellites à des intervalles de temps plus courts que ceux fournis par les mises à jours des éphémérides Schenewerk [2003].

1.4.4 Ionosphère

Comme expliqué dans la partie 1.3.4.2, la traversée de l'ionosphère va affecter le temps de propagation des signaux GNSS. Il existe plusieurs manières de corriger cette erreur

- les signaux modernes sont envoyés sur plusieurs fréquences. Comme l'ionosphère est un milieu dispersif (i.e., la vitesse de propagation d'une onde dépend de sa vitesse), il est alors possible d'effectuer une combinaison des mesures sur différentes fréquences (appelée combinaison *iono free*) permettant d'éliminer le retard ionosphérique [Groves, 2008a, Chap 7.4.2]
- on peut utiliser les informations fournies par les SBAS, qui contiennent des paramètres permettant d'estimer précisément ce retard
- on peut modéliser ces retards à l'aide des paramètres transmis dans les éphémérides, par exemple le modèle de Klobuchar Klobuchar [1987] pour le GPS ou le modèle NeQuick pour Galileo Galileo [2016].

Nous utiliserons cette dernière famille de méthodes, comme notre étude est destinée à des récepteurs bas-coûts et qui n'ont pas forcément accès aux premières sources d'informations. D'autre part, comme nous travaillons sur des données GPS, nous allons utiliser le célèbre modèle de Klobuchar, dont les méthodes et expressions des estimations $\hat{\epsilon}_{\text{iono},i}$ et $\hat{\epsilon}_{\text{iono},i}$ des erreurs de pseudodistance et de pseudovitesse dues à l'ionosphère sont détaillées dans l'annexe A.5.

1.4.5 Troposphère

Tout comme l'ionosphère, le retard troposphérique peut être estimé de plusieurs manières

- on peut utiliser les informations fournies par les SBAS, qui contiennent des paramètres permettant d'estimer précisément ce retard
- on peut modéliser ce retard. Il existe plusieurs modèles qui comportent tous deux étapes : le calcul du retard au zénith, puis la projection de ce retard au zénith.

Pour les mêmes motivations que présentées pour l'ionosphère, nous allons utiliser la seconde stratégie, et nous utiliserons le modèle présenté dans Leandro et al. [2006] pour les valeurs au zénith, que nous projeterons avec la fonction de mapping présentée dans Niell [1996]⁴. Les différents calculs ainsi que l'expression de l'estimation de l'erreur sur les pseudodistances $\hat{\epsilon}_{\text{tropo},i}$ ainsi que sur les pseudovitesse $\hat{\epsilon}_{\text{tropo},i}$ sont données dans l'annexe A.6.

1.4.6 Erreurs dues à l'environnement

Comme dit précédemment, nous allons supposer qu'il n'y a pas d'interférences dans les scénarios étudiés pour nous concentrer seulement sur les effets des multitrajets. Les multitrajets font partie des phénomènes les plus compliqués à corriger en navigation par satellites Le Marchand et al. [2009]; Marais et al. [2005], car ils dépendent de la configuration géométrique et de la date à laquelle le récepteur se trouve. Plus précisément, en l'absence d'obstacle, les signaux ne sont pas affectés par les multitrajets. Au contraire, lorsque le récepteur est proche d'un haut bâtiment par exemple, il est fort probable que certains des signaux qu'il reçoit se réfléchissent sur ce dernier, ce qui va perturber l'estimation des différents paramètres τ_i et Δf_i et donc les mesures utilisées pour le positionnement. Ce problème a reçu (et reçoit encore) une grande attention dans la littérature. On peut essayer de les combattre à différents niveaux

- au niveau de l'antenne, en exploitant le fait que les réflexions vont changer la polarisation des signaux reçus. Ainsi, les antennes peuvent être conçues pour être plus sensibles aux signaux polarisés circulairement à droite, qui est la polarisation normale des signaux GNSS [Groves, 2008a, Chap. 7.4.4]

4. les expressions des fonctions de mapping sont plus explicites sur la page *Navipedia* correspondante https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Mapping_of_Niell

- on peut aussi utiliser des techniques de traitement d’antennes [Brenneman et al. \[2010\]](#); [Daneshmand et al. \[2013\]](#); [Lee et al. \[2016\]](#); [Prades \[2005\]](#); [Rougerie \[2012\]](#) pour faire de la formation de faisceau (pré ou post-corrélation)
- on peut essayer de combattre la présence de multitrajets au niveau des corrélateurs (cf. 1.2.1.3), en utilisant par exemple un corrélateur étroit [Van Dierendonck et al. \[1992\]](#), un corrélateur double delta [McGraw et Braash \[1999\]](#), le calcul de pente Early-Late [Townsend et Fenton \[1994\]](#) ou le corrélateur vision [Fenton et Jones \[2005\]](#). Plus d’informations sont disponibles dans [Bhuiyan et Lohan \[2010\]](#)
- on peut aussi travailler sur la sortie du discriminateur (cf. 1.2.1.3), avec des techniques de maximum de vraisemblance basées par exemple sur des boucle à verrouillage de délai multitrajet (*Multipath Estimating Delay Lock Loop*, ou MEDLL) [Blanco-Delgado et Nunes \[2012\]](#); [Sahmoudi et Amin \[2006\]](#); [Van Nee et al. \[1994\]](#), ou sur le couplage d’amplitude (CADLL) [Chen et al. \[2013\]](#), ou enfin sur des boucles moins sensibles aux multitrajets (MIDLL) [Jardak et al. \[2011\]](#)
- on peut coupler les mesures à un modèle 3D de l’environnement [Bétaille et al. \[2013\]](#); [Bourdeau et al. \[2012\]](#); [Gu et al. \[2016\]](#); [Miura et al. \[2015\]](#); [Peyraud et al. \[2013\]](#), et faire de la fusion d’information avec par exemple une caméra. Cependant, ces modèles 3D ne sont pas toujours disponibles, et de plus l’environnement est susceptible d’évoluer fréquemment
- on peut finalement se servir seulement de l’information disponible au niveau du récepteur, à savoir des pseudodistances, pseudovitesse, éphémérides des satellites, C/N_0 , ... On peut par exemple lisser les mesures de code par les mesures de phase, pour les rendre plus robustes aux multitrajets [Misra et al. \[1999\]](#). On peut aussi combiner plusieurs mesures d’un même satellite, comme la différence code-porteuse (CmC, ou *Code minus Carrier*) [Parkinson et Spilker \[1996\]](#), ou combiner les informations du récepteur avec celles d’une station de référence pour faire du GNSS différentiel [[Groves, 2008a](#), Chap. 8.1] ou même combiner les informations de différents récepteurs pour faire du positionnement collaboratif [Alam et Dempster \[2013\]](#); [Ko et al. \[2015\]](#). Une famille intéressante de méthodes d’élimination des multitrajets repose sur des tests statistiques afin d’exclure ou de corriger les mesures biaisées. Le contrôle d’intégrité autonome du récepteur, ou *Receiver Autonomous Integrity Monitoring* (RAIM) appartient à cette catégorie [[Groves, 2008a](#), Chap. 15], [Gleason et Gebre-Egziabher \[2009\]](#). Une méthode plus récente repose sur une modélisation a contrario permettant d’écarter les mauvais satellites [Zair et al. \[2016\]](#). Ces techniques nécessitent une redondance de l’information et donc un nombre important de mesures, ce qui n’est pas toujours le cas en environnement urbain. Finalement, une autre famille de techniques consiste à considérer des sources d’erreurs non gaussiennes, telles que les mélanges de gaussiennes [Kubo et al. \[2011\]](#); [Yun et al. \[2008\]](#), les processus de Markov [Viandier et al. \[2008\]](#) ou les mélanges de processus de Dirichlet [Rabaoui et al. \[2012\]](#).

Dans cette thèse, nous allons aborder le problème des multitrajets à l’aide de cette dernière famille de techniques, en utilisant seulement les mesures fournies par un récepteur bas-coût, en considérant l’effet des multitrajets comme des biais additifs sur les mesures de pseudodistances ρ_i et de pseudovitesse $\dot{\rho}_i$, comme présenté par exemple dans [Giremus et al. \[2007\]](#). Nous allons expliquer comment estimer ces biais afin de les soustraire des différentes mesures de manière à les corriger. Une des contributions de cette thèse est d’utiliser des techniques d’estimation parcimonieuse afin d’estimer ces biais en ayant un coût calculatoire acceptable pour une implémentation temps réel. L’hypothèse principale permettant l’utilisation de ces techniques est que parmi tous les satellites traités par le récepteur, certains d’entre eux ne subissent pas de multitrajets (et donc le biais correspondant sur les mesures est exactement égal à zéro). Ces méthodes ont déjà été utilisées par exemple en radar [Lasserre et al. \[2016\]](#); [Leigsnering et al. \[2016\]](#), et l’hypothèse de parcimonie a déjà été utilisée en GNSS [Mohiuddin et al. \[2011\]](#). Cependant, la méthode proposée repose sur une approche différente dans le sens

où elle traite directement les biais multitrajets et n'utilise pas un vecteur d'état augmenté comme dans Mohiuddin et al. [2011].

1.4.7 Erreurs dues au récepteur

Comme dit précédemment, le récepteur induit deux types d'erreurs dans les mesures

- le biais d'horloge b et la dérive d'horloge \dot{b} , dues comme son nom l'indique à l'horloge du récepteur, qui n'est pas synchronisée avec celles des satellites, et donc dont la valeur va varier au cours du temps par rapport au temps GNSS considéré
- le bruit, dû aux différents composants actifs qui constituent le récepteur, et au bruit de boucle à la sortie de chacune des boucles de poursuite (PLL, FLL et DLL).

Les deux premiers paramètres sont donc des inconnues de l'état à estimer. Le second apparaît dans la plupart des problèmes d'estimation, et possède un caractère aléatoire généralement connu.

1.5 Les indicateurs de qualité

Nous allons présenter dans cette partie différents indicateurs de la qualité de la mesure (un par satellite) ou de la position (correspondant à la répartition des satellites au-dessus de l'utilisateur).

1.5.1 Élévation

Comme on peut le voir sur la figure 1.18, plus un satellite va avoir une élévation θ_i importante, moins il a de chance de se réfléchir sur un obstacle, et inversement. D'autre part, compte tenu de cette élévation, le temps de parcours des signaux GNSS à travers l'atmosphère est plus long, donc les erreurs $\varepsilon_{\text{iono},i}$, $\varepsilon_{\text{tropo},i}$, $\dot{\varepsilon}_{\text{iono},i}$ et $\dot{\varepsilon}_{\text{tropo},i}$ seront plus importantes pour des satellites à basse élévation. Certains récepteurs écartent systématiquement les satellites ayant une valeur d'élévation inférieure à un certain masque (par exemple 10°). À l'aide de l'azimut ψ_i et de l'élévation, on peut tracer ce qu'on appelle un *skyplot* (carte du ciel), pour se rendre compte de la répartition des satellites dans le ciel. Un exemple de skyplot est donné dans la figure 1.20. L'axe des abscisses du skyplot correspond à l'axe Ouest-Est alors que l'axe des ordonnées correspond à l'axe Sud-Nord. La position des satellites dans le skyplot est alors donnée en coordonnées polaires (rayon, angle) par $(\frac{\pi}{2} - \theta_i, \frac{\pi}{2} - \psi_i)$.

1.5.2 Rapport signal sur bruit

La force du signal reçu peut indiquer si ce dernier a subi des réflexions ou de la diffraction au cours de son parcours, et constitue ainsi un critère de fiabilité du signal. Dans la plupart des problèmes d'estimation, (traitement d'image, radar, ...), on est amené à travailler avec le rapport signal à bruit SNR , en dB. En GNSS en revanche, on travaille plutôt avec le rapport porteuse sur densité de bruit C/N_0 , en dBHz Joseph et Petovello [2010]. Le SNR vaut

$$SNR = S - N \quad (1.53)$$

où

- S est la puissance du signal en dBW
- N est la puissance du bruit dans une bande passante donnée, en dBW

alors que C/N_0 vaut

$$C/N_0 = C - N_0 = C - (N - BW) = SNR + BW \quad (1.54)$$

où

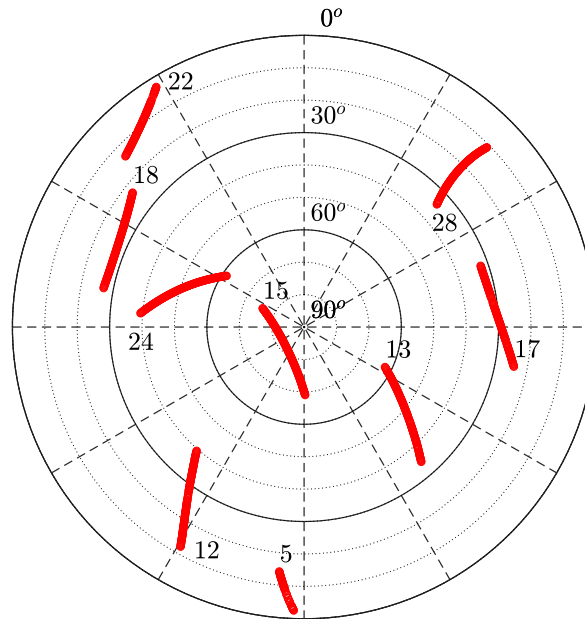


FIGURE 1.20 – Exemple de skyplot.

- C est la puissance du signal en dBW
- N est la puissance du bruit dans une bande passante donnée, en dBW
- N_0 est la densité de bruit en dBW/Hz
- BW est la bande passante d'observation en dBHz, habituellement la bande passante équivalente en bruit du dernier filtre d'un récepteur.

L'avantage de ce dernier est qu'il est indépendant des étapes d'acquisition et de poursuite et indépendant de la bande passante du récepteur, et permet donc d'apprécier réellement la qualité des signaux contrairement au SNR .

1.5.3 La dilution de précision

La dilution de précision, ou *Dilution Of Precision* (DOP) est un paramètre géométrique dépendant uniquement de la répartition des satellites. En effet, selon leur disposition, la zone d'erreur de position peut être plus ou moins grande, comme le montre la figure 1.21. Supposons connue la matrice de covariance de la position dans le repère ENU, et notons $\sigma_e^2, \sigma_n^2, \sigma_u^2$ ses termes diagonaux. On note σ_t^2 la variance sur le biais d'horloge. En supposant que les mesures de pseudodistance ρ_i ont la même variance σ , on définit alors les DOP suivants

- GDOP (Global DOP) : $GDOP = \frac{\sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_n^2 + \sigma_u^2 + \sigma_t^2}}{\sigma}$
- PDOP (Precision DOP) : $PDOP = \frac{\sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_n^2 + \sigma_u^2}}{\sigma}$
- HDOP (Horizontal DOP) : $HDOP = \frac{\sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_n^2}}{\sigma}$
- VDOP (Vertical DOP) : $VDOP = \frac{\sigma_u}{\sigma}$
- TDOP (Time DOP) : $TDOP = \frac{\sigma_t}{\sigma}$

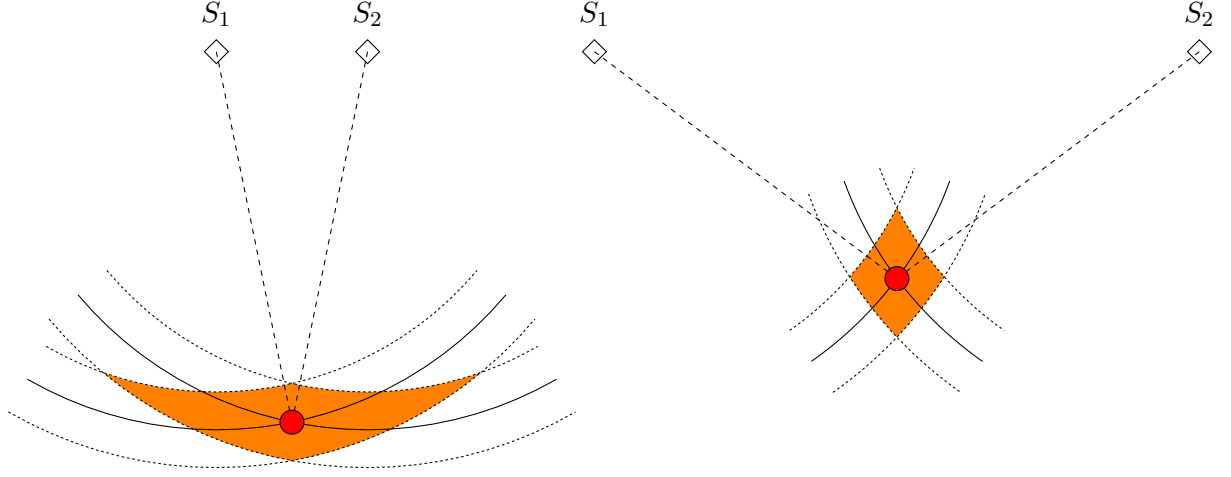


FIGURE 1.21 – Représentation du concept de dilution de précision. Les cercles en traits pleins correspondent aux mesures exactes de distance pour chacun des satellites, alors que les cercles en pointillés représentent ces mesures \pm leurs incertitudes. On remarque qu'à droite, la zone d'incertitude (en orange) est plus petite qu'à gauche, d'où l'importance d'avoir une bonne dilution de précision

1.6 Estimation de l'état

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer les mesures en fonction uniquement des inconnues que nous cherchons : la position \mathbf{r} et la vitesse \mathbf{v} du récepteur. En effet, reprenons les équations (1.42) et (1.46). Nous allons de plus supposer que tous les modèles présentés précédemment corrigent parfaitement les erreurs correspondantes, à part celles dues aux multitrajets. On peut donc écrire

$$\rho_i = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|_2 + b + \varepsilon_{n,i} \quad (1.55)$$

$$\dot{\rho}_i = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})^T \mathbf{a}_i + \dot{b} + \dot{\varepsilon}_{n,i}. \quad (1.56)$$

La deuxième équation est linéaire par rapport à \mathbf{v} , mais la première n'est pas linéaire par rapport à \mathbf{r} . Pour chercher la position \mathbf{r} et la vitesse \mathbf{v} vérifiant (1.55) et (1.56), une solution consiste à linéariser (1.55) autour d'une position approchée $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et d'un biais d'horloge approché b_0 . On pose alors $\rho_{i,0} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0\|_2 + b_0$. D'autre part, on pose $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Considérons la fonction $f : \mathbf{r} \mapsto f(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|_2$. On peut linéariser cette fonction à l'aide d'un développement de Taylor pour obtenir

$$f(\mathbf{r}) \approx f(\mathbf{r}_0) + D_f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.57)$$

où $D_f(\mathbf{r}_0)$ désigne la matrice Jacobienne de f en \mathbf{r}_0 . On peut remarquer que

$$f(\mathbf{r}) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}, \quad (1.58)$$

d'où

$$\begin{aligned} D_f(\mathbf{r}_0) &= \left[\frac{x_0 - x_i}{\sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2}} \quad \frac{y_0 - y_i}{\sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2}} \quad \frac{z_0 - z_i}{\sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2}} \right] \\ &= \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)^T}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i\|_2} \\ &= -\mathbf{a}_i^T. \end{aligned} \quad (1.59)$$

On a donc

$$\rho_i - \rho_0 = -\mathbf{a}_i^T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + b - b_0 + \varepsilon_{n,i} \quad (1.60)$$

et directement par linéarité (en notant v_0 et \dot{b}_0 la vitesse et la dérive d'horloge au point de linéarisation $\dot{\rho}_{i,0} = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})^T \mathbf{a}_i + \dot{b}_0$ et $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$)

$$\dot{\rho}_i - \dot{\rho}_0 = -\mathbf{a}_i^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + \dot{b} - \dot{b}_0 + \dot{\varepsilon}_{n,i}. \quad (1.61)$$

On peut alors définir un vecteur de mesures

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_p \\ \mathbf{z}_r \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{z}_p = [\rho_1 \quad \dots \quad \rho_s]^T \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_r = [\dot{\rho}_1 \quad \dots \quad \dot{\rho}_s]^T, \quad (1.62)$$

où s désigne le nombre de satellites vus par le satellite. Si on introduit les matrices \mathbf{G} et \mathbf{H} définies⁵ par

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\mathbf{a}_s & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.63)$$

et

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad (1.64)$$

un vecteur d'état

$$\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{r}^T \quad b \quad \mathbf{v}^T \quad \dot{b}]^T, \quad (1.65)$$

et un vecteur de bruit

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_p \\ \mathbf{n}_r \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{n}_p = [\varepsilon_{n,1} \quad \dots \quad \varepsilon_{n,s}]^T \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_r = [\dot{\varepsilon}_{n,1} \quad \dots \quad \dot{\varepsilon}_{n,s}]^T, \quad (1.66)$$

on obtient

$$\mathbf{z} - \mathbf{z}_0 = \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0) + \mathbf{n} \quad (1.67)$$

où \mathbf{z}_0 et $\boldsymbol{\xi}_0$ sont définis de la même manière que \mathbf{z} et $\boldsymbol{\xi}$ au point de linéarisation du problème. On peut finalement définir la variation de mesure

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0 \quad (1.68)$$

et la variation d'état

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0 \quad (1.69)$$

pour obtenir le problème

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1.70)$$

que l'on peut résoudre par des techniques d'estimation classiques. Notons que (1.70) admet une solution unique si $2s \geq 8 \Leftrightarrow s > 4$, i.e., si on a plus d'équations que d'inconnues. La suite de ce chapitre présente certaines méthodes d'estimation ayant été utilisées pour le positionnement par satellites.

1.6.1 La méthode des moindres carrés pondérés

Estimer le vecteur \mathbf{x} à partir de l'équation (1.70) pour une matrice \mathbf{H} connue est un problème d'estimation très classique si l'on suppose le vecteur \mathbf{n} comme centré, gaussien et de matrice de covariance connue \mathbf{R} , i.e.,

$$\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}; \mathbf{0}, \mathbf{R}) \quad (1.71)$$

5. N.B., si on exprime cette matrice dans le repère ENU, on peut en déduire les valeurs des différents DOP comme la racine carrée la trace des différentes sous-matrices de $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$ correspondantes aux paramètres voulus, cf., [Kaplan et Hegarty, 2006, Chap. 7.3.1]

où $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})$ signifie que \mathbf{n} suit une loi normale de vecteur moyen $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\sigma}$. Par exemple, la méthode du maximum de vraisemblance consiste à chercher le vecteur \mathbf{x} qui maximise la loi du vecteur d'observations \mathbf{y} appelée vraisemblance. Dans le cas gaussien, on a

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})\right) \\ \Rightarrow \log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) + \text{cste} \\ \Rightarrow \frac{\partial \log p(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) \end{aligned}$$

d'où

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \quad (1.72)$$

qui est aussi l'estimateur des moindres carrés pondérés de \mathbf{x} . En général, la matrice \mathbf{R} n'est pas connue et doit être estimée. La plupart du temps, les erreurs de modélisations (horloge satellite, relativité, ionosphère, troposphère) sont supposées centrées et sont incluses dans le bruit de mesure. Une autre approximation souvent faite est de supposer que la contribution de chacune des erreurs a la même variance pour chaque satellite, ce qui revient à considérer

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_p^2 I_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_r^2 I_s \end{bmatrix} \quad (1.73)$$

avec σ_p^2 la variance des mesures de pseudodistance et σ_r^2 la variance des mesures de pseudo-vitesse telles que

$$\sigma_p^2 = \sigma_{p,\text{clck,sat}}^2 + \sigma_{p,\text{rel}}^2 + \sigma_{p,\text{eph}}^2 + \sigma_{p,\text{iono}}^2 + \sigma_{p,\text{tropo}}^2 + \sigma_{p,\text{MP}}^2 + \sigma_{p,\text{noise}}^2 \quad (1.74)$$

$$\sigma_r^2 = \sigma_{r,\text{clck,sat}}^2 + \sigma_{r,\text{rel}}^2 + \sigma_{r,\text{eph}}^2 + \sigma_{r,\text{iono}}^2 + \sigma_{r,\text{tropo}}^2 + \sigma_{r,\text{MP}}^2 + \sigma_{r,\text{noise}}^2 \quad (1.75)$$

i.e., chaque variance est la somme des variances de chaque source d'erreur sur chaque type de mesure. Des valeurs typiques de σ_p^2 sont disponibles par exemple dans [Groves, 2008a, Chap. 7.5.4] ou [Kaplan et Hegarty, 2006, Chap. 7.2.8] pour la variance des pseudodistances, appelée erreur de distance équivalente utilisateur, ou *User Equivalent Range Error* (UERE). Les bilans pour le Doppler sont moins fréquents, mais on peut trouver des valeurs de σ_r^2 dans dans Zair et al. [2016]. Nous allons dans nos expérimentations choisir les valeurs proposées dans cette dernière référence, à savoir

$$\sigma_p = 5 \quad (\text{m}) \quad (1.76)$$

$$\sigma_r = 2 \times \lambda_{L_1} \quad (\text{m.s}^{-1}). \quad (1.77)$$

Cette solution est pratique pour calculer un point à partir d'une estimation grossière $\boldsymbol{\xi}_0$. Cependant, la plupart des applications GNSS nécessite de calculer la position d'un point en mouvement. Dans ce cas, l'estimation peut être améliorée en prenant en compte les mesures des instants précédents et en utilisant le célèbre filtre de Kalman.

1.6.2 Filtrage statistique par filtre de Kalman

1.6.2.1 Le filtre de Kalman étendu pour la navigation

Le filtre de Kalman Kalman [1960], [Gustafsson, 2012, Chap. 7], [Groves, 2008a, Chap. 3] permet d'estimer l'évolution du vecteur d'état en tenant compte des états précédemment estimés (et donc des mesures des instants précédents). C'est pourquoi nous devons rajouter une dimension temporelle à tous nos paramètres, mesures et état, ce que nous allons faire en

rajoutant simplement l'indice k à chacun d'entre eux pour différencier les instants temporels. Par exemple, à l'instant k , le vecteur d'état $\boldsymbol{\xi}$ se note donc $\boldsymbol{\xi}_k$ et sa variation \boldsymbol{x} se note \boldsymbol{x}_k . D'autre part, on note $\boldsymbol{z}_{1:k} = \{\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_k\}$ l'ensemble des vecteurs de mesures du problème de navigation des instants précédents.

Le filtre de Kalman est un filtre bayésien récursif qui cherche la moyenne de la loi a posteriori du vecteur d'état $p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{z}_{1:k})$, qui est égale d'après le théorème de Bayes à

$$p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{z}_{1:k}) = \frac{p(\boldsymbol{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{z}_{1:k-1})p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{z}_{1:k-1})}{p(\boldsymbol{z}_k | \boldsymbol{z}_{1:k-1})}. \quad (1.78)$$

Cette loi a posteriori est donc constituée de 3 termes

- la vraisemblance des mesures $p(\boldsymbol{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{z}_{1:k-1})$
- la loi a priori de l'état sachant les anciennes mesures $p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{z}_{1:k-1})$
- la loi marginale des mesures $p(\boldsymbol{z}_k | \boldsymbol{z}_{1:k-1})$, mais qui ne nous intéresse pas car il s'agit juste d'un facteur multiplicatif constant permettant d'avoir une loi a posteriori dont l'intégrale vaut 1

Nous allons étudier plus en détails ces deux premiers termes.

Loi a priori

Ce terme peut être réécrit comme la loi marginale suivante

$$p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{z}_{1:k-1}) = \int p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{\xi}_{k-1}, \boldsymbol{z}_{1:k-1})p(\boldsymbol{\xi}_{k-1} | \boldsymbol{z}_{1:k-1})d\boldsymbol{\xi}_{k-1}. \quad (1.79)$$

Pour pouvoir aller plus loin, il nous faut définir un modèle d'état. Comme pour la plupart des applications, nous choisissons un modèle dynamique Markovien linéaire et Gaussien qui suppose que l'état à l'instant actuel dépend seulement de l'état à l'instant précédent

$$\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{F}_{k-1}\boldsymbol{\xi}_{k-1} + \boldsymbol{u}_{k-1} \quad (1.80)$$

$$\boldsymbol{u}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{u}_{k-1}; \mathbf{0}, \boldsymbol{Q}_{k-1}). \quad (1.81)$$

Pour la matrice \boldsymbol{F}_{k-1} , on peut définir une marche aléatoire décrivant l'évolution temporelle de $\boldsymbol{\xi}_k$ et donc choisir

$$\boldsymbol{F}_{k-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_4 & \Delta t_{k-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_4 \end{bmatrix} \quad (1.82)$$

où Δt_{k-1} désigne la durée entre les instants $k-1$ et k . Pour la matrice de covariance du bruit d'état $\boldsymbol{Q}_{k-1} = \mathbb{E}[\boldsymbol{u}_k \boldsymbol{u}_k^T]$, on peut utiliser la forme donnée dans [Brown et Hwang, 1992, Chap. 11] et [Bar-Shalom et al., 2002, Chap. 12]

$$\boldsymbol{Q}_{k-1} = \begin{bmatrix} S_a \frac{\Delta t_{k-1}^3}{3} \boldsymbol{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & S_a \frac{\Delta t_{k-1}^2}{2} \boldsymbol{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & c^2 \left(S_b \Delta t_{k-1} + S_d \frac{\Delta t_{k-1}^3}{3} \right) & \mathbf{0}_{1 \times 3} & c^2 \left(S_d \frac{\Delta t_{k-1}^2}{2} \right) \\ S_a \frac{\Delta t_{k-1}^2}{2} \boldsymbol{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & S_a \Delta t_{k-1} \boldsymbol{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & c^2 \left(S_d \frac{\Delta t_{k-1}^2}{2} \right) & \mathbf{0}_{1 \times 3} & c^2 (S_d \Delta t_{k-1}) \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

où S_a est la densité spectrale de puissance de l'accélération de l'utilisateur, et S_b et S_d sont les densités spectrales de puissances respectives du biais et de la dérive d'horloge GPS. S_a dépend de l'attitude du véhicule à positionner et représente les fluctuations autour d'une trajectoire rectiligne, pour une voiture nous prendrons $\sigma_a^2 = 2^2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$. Pour l'horloge du récepteur, il existe plusieurs modèles dont les paramètres dépendent du type d'horloge. Nous choisissons [Bar-Shalom et al., 2002, Chap. 12]

$$S_b = 0.5\gamma \quad S_d = 2\pi^2\alpha \quad (1.84)$$

| Type d'horloge | α | γ |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| Quartz | 2×10^{-20} | 2×10^{-19} |
| Quartz thermostaté | 4×10^{-23} | 8×10^{-20} |
| Rubidium | 4×10^{-29} | 2×10^{-20} |

TABLEAU 1.1 – Différents paramètres de variance d'Allan pour différents types d'horloge.

ou α et γ sont des paramètres de variance d'Allan classiquement utilisés pour décrire le comportement des horloges, dont des valeurs sont données dans la table 1.1. Travaillant sur un récepteur bas-coût, nous choisirons sur une horloge à Quartz. Le modèle ainsi défini donne

$$p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{\xi}_{k-1}, \mathbf{z}_{1:k-1}) = p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{\xi}_{k-1}). \quad (1.85)$$

avec

$$\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{\xi}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\xi}_k; \mathbf{F}_{k-1} \boldsymbol{\xi}_{k-1}, \mathbf{Q}_{k-1}). \quad (1.86)$$

La dernière hypothèse est la connaissance de $p(\boldsymbol{\xi}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1})$ qui dans le cas Gaussien est définie par

$$\boldsymbol{\xi}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1}(\mathbf{z}_{1:k-1}), \mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{z}_{1:k-1})) \quad (1.87)$$

dont les valeurs des différents paramètres vont être calculées par récurrence. Par propriété des vecteurs gaussiens,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_1 &\sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_2; \mathbf{F} \mathbf{x}_1, \mathbf{Q}) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}) \\ \Rightarrow \mathbf{x}_2 &\sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_2; \mathbf{F} \boldsymbol{\mu}, \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}) \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{F} \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{P} \mathbf{F}^T \\ \mathbf{F} \mathbf{P} & \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (1.88)$$

On peut donc exprimer la loi marginale dans (1.79)

$$\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\xi}_k; \mathbf{F}_{k-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1}(\mathbf{z}_{1:k-1}), \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{z}_{1:k-1}) \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}). \quad (1.89)$$

Dans la suite, afin d'alléger les notations, on enlèvera $\mathbf{z}_{1:k-1}$ dans les expressions de $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1}$ et \mathbf{P}_{k-1} . Ces premiers calculs permettent de donner la première étape du filtre de Kalman, à savoir l'étape de prédiction

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1} \quad (1.90)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (1.91)$$

Vraisemblance

Soit h_k la fonction telle que

$$\mathbf{z}_k = h_k(\boldsymbol{\xi}_k) + \mathbf{n}_k. \quad (1.92)$$

On a

$$p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{z}_{1:k-1}) = p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k) \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; h_k(\boldsymbol{\xi}_k), \mathbf{R}_k). \quad (1.93)$$

Comme précisé précédemment, la fonction h_k n'est pas linéaire, et donc on ne peut pas poursuivre simplement les calculs pour obtenir la loi a posteriori (1.78). Cependant, on a vu qu'il est possible de linéariser la relation (1.92) pour obtenir (1.70). Si on applique une linéarisation au point de prédiction $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}$, on obtient

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k \quad (1.94)$$

où

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{z}_k - h_k(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}) \quad (1.95)$$

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\xi}_k - \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} \quad (1.96)$$

ce qui permet de déterminer la loi approchée pour \mathbf{z}_k

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{z}_{1:k-1} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; h_k(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_k(\boldsymbol{\xi}_k - \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}), \mathbf{R}_k) \\ &\sim \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; h_k(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}) - \mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} + \mathbf{H}_k \boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{R}_k). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Cette linéarisation de l'équation de mesure permet de construire un filtre de Kalman autour de cette partie linéaire, et constitue le filtre de Kalman étendu, ou *Extended Kalman Filter* (EKF) [Smith et al. \[1962\]](#), [\[Gustafsson, 2012, Chap. 8\]](#).

Loi a posteriori

On peut donc déduire de tout ce travail préliminaire la loi a posteriori de $\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}$. En effet, on a

$$\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{z}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}(h_k(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}) - \mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} + \mathbf{H}_k \boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{R}_k)$$

et

$$\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})$$

donc par propriété des vecteurs gaussiens (1.88)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k-1} \\ \mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} \\ h_k(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}) - \mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} + \mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k-1} & \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \\ \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} & \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \end{bmatrix} \right). \quad (1.98)$$

A l'aide de la propriété

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{B} \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_1; \mathbf{a} + \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}), \mathbf{A} - \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}^T) \quad (1.99)$$

on en déduit que la loi a posteriori est gaussienne, avec les récurrences précédemment établies. Les étapes de mise à jour du filtre peuvent alors être déterminées, car la moyenne de la loi a posteriori (donc l'estimateur du maximum a posteriori et du minimum d'erreur quadratique comme la loi est Gaussienne) vaut

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} (\mathbf{z}_k - (h_k(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}))), \quad (1.100)$$

ce qui en définissant la covariance de l'innovation

$$\mathbf{S}_k = (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) \quad (1.101)$$

et le gain de Kalman

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \quad (1.102)$$

donne

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k, \quad (1.103)$$

qui possède la matrice de covariance suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \\ &= (\mathbf{I}_8 - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \end{aligned} \quad (1.104)$$

1.6.2.2 Implémentation racine carrée

Afin d'obtenir un code plus robuste au conditionnement des matrices et à leurs inversions, nous choisissons l'implémentation racine carrée du filtre de Kalman [\[Gustafsson, 2012, Chap. 7.5\]](#). L'idée repose sur l'application de décompositions QR sur les différentes racines carrées

des matrices⁶ de l'algorithme afin de travailler avec des matrices facilement inversibles (car triangulaires). On peut alors montrer la décomposition suivante

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_k^{1/2} & \mathbf{H}_k \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k|k}^{1/2} & \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_k^{1/2} \\ \mathbf{0}_{8 \times 2s_k} & \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k|k}^{1/2} & \mathbf{Q}_k^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k^{1/2} & \mathbf{0}_{2s_k \times 8} & \mathbf{0}_{2s_k \times 8} \\ \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k^{1/2} & \mathbf{P}_{k|k}^{1/2} & \mathbf{0}_8 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \quad (1.105)$$

où \mathbf{Q} désigne la seconde matrice de la décomposition QR dont l'expression n'est pas utile. En calculant la décomposition QR de la matrice de gauche, on peut identifier les matrices $\mathbf{S}_k^{1/2}$, $\mathbf{K}_k \mathbf{S}_k^{1/2}$ et $\mathbf{P}_{k|k}^{1/2}$ pour en déduire une autre étape de mise à jour du filtre de Kalman étendu présenté précédemment

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k^{1/2} \mathbf{S}_k^{-1/2} \mathbf{y}_k \quad (1.106)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k}^{1/2} (\mathbf{P}_{k|k}^{1/2})^T \quad (1.107)$$

1.7 Résumé de l'algorithme de positionnement de référence

L'algorithme état de l'art qui sera utilisé comme point de départ pour notre étude reprend tous les points présentés précédemment et est résumé dans la figure 1.22. De plus, une routine Matlab est disponible à l'adresse <http://perso.tesa.prd.fr/jlesouple/codes.html>. Dans cette thèse, nous proposons d'ajouter une étape à cette figure qui va limiter l'impact des multitrajets sur les erreurs de mesure, ce qui correspond à rajouter une branche qui arrive au bloc h_k , en se servant des paramètres évoqués jusqu'alors provenant du récepteur seul (pas de couplage d'informations extérieures).

6. matrices $M^{1/2}$ telles que $M = M^{1/2}(M^{1/2})^T$

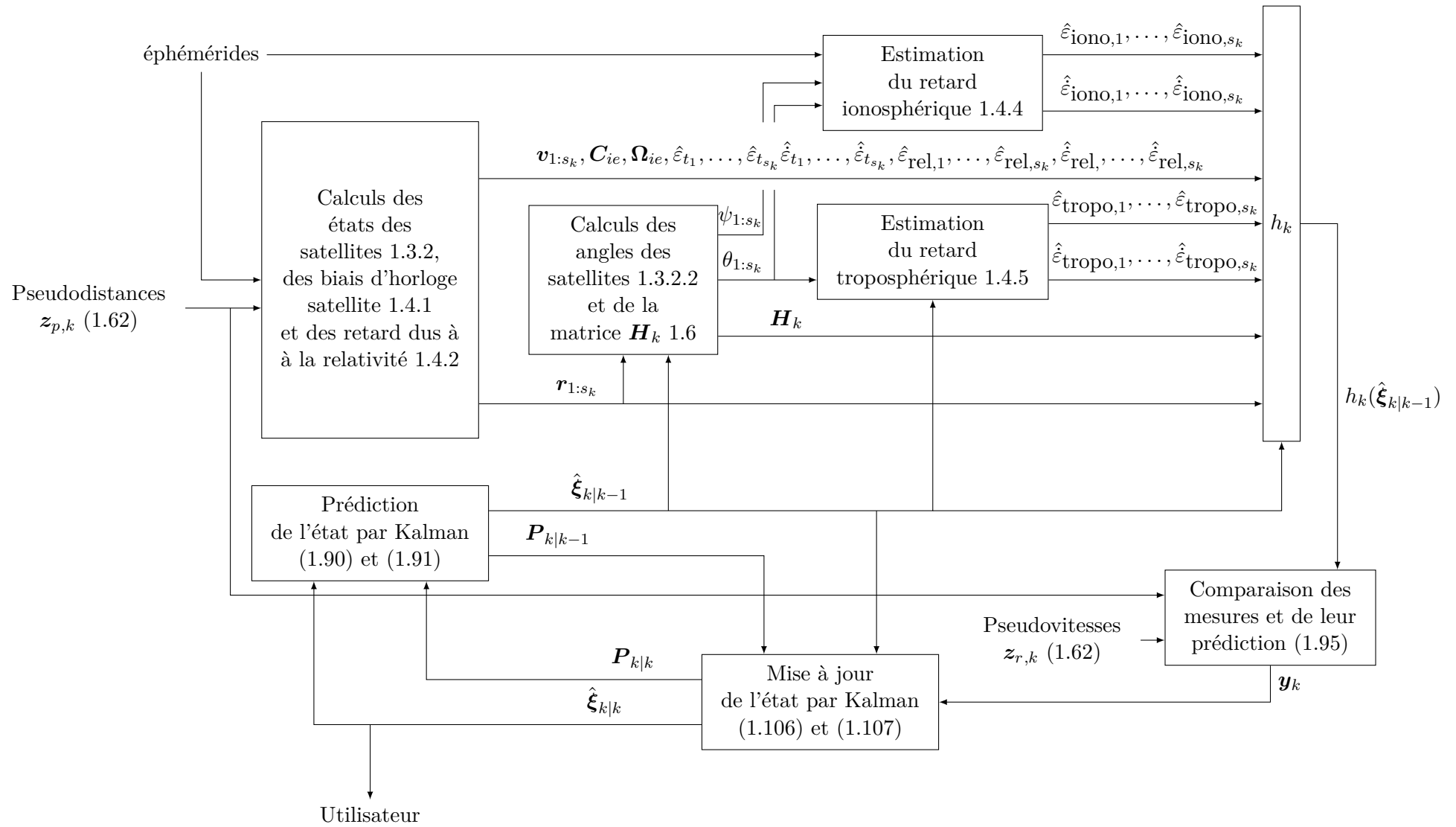


FIGURE 1.22 – Algorithme de positionnement de référence.

Chapitre 2

Estimation parcimonieuse pour la navigation par satellites

*« J'ai longtemps cherché la solution à ces nuisances
Ça m'apparaît maintenant comme une évidence »*

Aurélien Cotentin

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.1 | Introduction | 42 |
| 2.2 | L'estimation parcimonieuse | 42 |
| 2.2.1 | LASSO | 43 |
| 2.2.2 | Reweighted ℓ_1 | 45 |
| 2.2.3 | Fused LASSO | 46 |
| 2.3 | Application à l'estimation des multitrajets en GNSS | 46 |
| 2.3.1 | Formulation du problème | 47 |
| 2.3.2 | Définition des poids | 48 |
| 2.3.3 | Résolution du problème | 50 |
| 2.3.4 | Variantes de l'algorithme | 51 |
| 2.4 | Résultats expérimentaux | 56 |
| 2.4.1 | Données synthétiques | 57 |
| 2.4.2 | Données réalistes | 58 |
| 2.4.3 | Données réelles | 60 |
| 2.4.4 | Variantes de l'algorithme | 69 |
| 2.4.5 | Coût calculatoire | 75 |
| 2.5 | Conclusion | 76 |

2.1 Introduction

Les statisticiens ont de plus en plus accès à un nombre de données très important en raison par exemple du coût des appareils de plus en plus faible, de l'augmentation des capacités de stockages, des accès et communication facilités par internet, ... d'où l'intérêt actuel pour le *Big Data*. Il est donc nécessaire d'extraire au mieux et au plus vite des informations pertinentes de toutes ces données. Ceci peut se faire à l'aide d'hypothèses simplificatrices permettant de réduire le nombre d'inconnues significatives de certains problèmes, et c'est donc dans cet esprit que sont apparues diverses techniques d'estimation parcimonieuse à la fin des années 90. Comme son nom l'indique, l'estimation parcimonieuse va donc chercher à décrire un nombre important de données à l'aide d'un nombre réduit de paramètres significatifs. Pour ce faire, on se retrouve de manière générale devant un problème mal posé, le plus généralement ayant plus d'inconnues que d'équations avec une infinité de solutions. Il devient alors nécessaire de régulariser le problème, et donc de rajouter des hypothèses a priori sur ce dernier. Dans le cadre de l'estimation parcimonieuse, on choisit d'intégrer une information a priori de parcimonie, i.e., on va supposer que dans le vecteur à estimer, seules certaines composantes sont non-nulles. Il existe plusieurs manières d'intégrer cette contrainte de parcimonie dans la résolution d'un problème d'estimation statistique dont certaines sont décrites dans la partie suivante.

2.2 L'estimation parcimonieuse

Dans la suite, nous supposons que nous disposons de données bruitées $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_1 \ \dots \ \tilde{y}_m]^T \in \mathbb{R}^m$ linéairement dépendantes d'un vecteur $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \dots \ \theta_n]^T \in \mathbb{R}^n$, avec $m < n$ par le biais d'une matrice $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, i.e.,

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{n} \quad (2.1)$$

où $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^m$ désigne le bruit de mesure. L'estimation parcimonieuse consiste à estimer le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ vérifiant (2.1) avec des contraintes de parcimonie sur ce vecteur $\boldsymbol{\theta}$. Une notion primordiale qu'il nous faut définir afin de parler de parcimonie est la pseudo-norme ℓ_0 , qui se définit pour un vecteur $\boldsymbol{\theta}$ par

$$\|\boldsymbol{\theta}\|_0 = \#\{\theta_i, i = 1, \dots, n : \theta_i \neq 0\} \quad (2.2)$$

où $\#$ désigne le cardinal d'un ensemble. En d'autres termes, la norme ℓ_0 de $\boldsymbol{\theta}$ est le nombre de composantes non-nulles de $\boldsymbol{\theta}$. La contrainte de parcimonie peut alors être introduite de différentes manières [Soubies et al. \[2015\]](#). Si on souhaite imposer une contrainte sur le nombre d'éléments non-nuls de $\boldsymbol{\theta}$, par exemple $\|\boldsymbol{\theta}\|_0 \leq k$, on peut alors résoudre le problème suivant

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \|\boldsymbol{\theta}\|_0 \leq k \quad (2.3)$$

où s.c. signifie sous contrainte. Si on souhaite limiter la puissance du bruit, on peut plutôt chercher à résoudre

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{\theta}\|_0 \quad \text{s.c.} \quad \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 \leq \epsilon. \quad (2.4)$$

Enfin, si on ne souhaite pas imposer de contrainte à l'un de ces deux niveaux, on peut utiliser la forme pénalisée

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\theta}\|_0 \quad (2.5)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^+$ désigne un hyperparamètre du problème, ou paramètre de régularisation, qui permet de balancer l'importance des deux termes à minimiser, à savoir l'attache aux données $\frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}\|_2^2$ et le terme de parcimonie $\|\boldsymbol{\theta}\|_0$. On remarque que pour λ grand, le terme de

droite l'emporte sur la fonction coût à minimiser, et on va donc minimiser $\|\boldsymbol{\theta}\|_0$ seul, ce qui donne $\boldsymbol{\theta} = 0$, alors qu'au contraire, $\lambda \ll 1$ va favoriser l'attache aux données, et donc donner un vecteur avec peu (voire pas) de composantes non nulles. Autrement dit, λ permet de faire la part des choses entre les deux critères qui nous intéressent. Les problèmes précédents sont connus pour être NP difficiles (coût calculatoire combinatoire), et nécessitent l'utilisation de solutions combinatoires qui testent toutes les configurations possibles pour $\boldsymbol{\theta}$ (en terme d'éléments nuls et non nuls). Cette difficulté est par exemple liée au fait que le problème (2.5) est non-convexe. C'est pourquoi plusieurs auteurs ont essayé de simplifier ces différents problèmes, afin des les résoudre de manière simple et rapide.

2.2.1 LASSO

Une manière simple de rendre les problèmes (2.3), (2.4), (2.5) convexes, et ainsi obtenir l'existence et l'unicité de la solution, est de remplacer la pseudo-norme ℓ_0 par une norme ℓ_1 Candès et al. [2008] définie par

$$\|\boldsymbol{\theta}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\theta_i|. \quad (2.6)$$

Par exemple, le problème (2.3) devient

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \leq k \quad (2.7)$$

connu sous le nom de Basis Pursuit Chen et al. [1998], tandis que le problème (2.4) s'écrit

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \quad \text{s.c.} \quad \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 \leq \epsilon \quad (2.8)$$

connu sous le nom de Basis Pursuit Denoising. Enfin le problème (2.5) conduit à

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \quad (2.9)$$

connu sous le nom de *Least Absolute Shrinkage Operator* (LASSO) Tibshirani [1996]. C'est sur ce dernier problème que nous allons concentrer notre étude, car il permet de ne pas imposer directement de contraintes sur le nombre d'éléments non nuls ni sur le niveau de bruit. Nous allons dans un premier temps voir comment ce problème peut être résolu puis discuter de ses inconvénients.

2.2.1.1 Résolution du problème LASSO

Il existe plusieurs méthodes de résolution du problème LASSO : résolution par ADMM (*Alternating Direction Method of Multipliers*) Boyd et al. [2010], descente de gradient Beck et Teboulle [2009]; Figueiredo et Nowak [2003], ... Nous avons choisi d'utiliser l'algorithme *Shooting* Fu [1998]; Pendse [2011], qui est un algorithme itératif travaillant élément par élément. Reprenons (2.9), et supposons que $n = 1$. Le problème (2.9) devient alors

$$\begin{aligned} & \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{h}}\theta\|_2^2 + \lambda|\theta| \\ \Leftrightarrow & \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{h}}\theta)^T (\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{h}}\theta) + \lambda|\theta| \\ \Leftrightarrow & \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}}\theta^2 - 2\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}}\theta) + \lambda|\theta|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

On définit alors

$$f(\theta) = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}}\theta^2 - 2\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}}\theta) + \lambda|\theta| \quad (2.11)$$

qui est la fonction à minimiser, de gradient généralisé

$$\nabla_{f,\theta}(\theta) = \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} \theta - \tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} + \lambda \partial(|\theta|) \quad (2.12)$$

avec

$$\partial(|\theta|) = \begin{cases} \text{sign}(\theta) & \text{si } \theta \neq 0 \\ [-1, 1] & \text{si } \theta = 0 \end{cases} . \quad (2.13)$$

Pour minimiser f , il suffit d'analyser les différentes valeurs que peut prendre $\text{sign}(\theta)$

— si $\theta > 0$, alors

$$\nabla_{f,\theta}(\theta) = \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} \theta - \tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} + \lambda \quad (2.14)$$

donc

$$\nabla_{f,\theta}(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} - \lambda}{\tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}}} \quad \text{et} \quad \theta > 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} > \lambda \quad (2.15)$$

— si $\theta < 0$, alors

$$\nabla_{f,\theta}(\theta) = \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} \theta - \tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} - \lambda \quad (2.16)$$

donc

$$\nabla_{f,\theta}(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} + \lambda}{\tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}}} \quad \text{et} \quad \theta < 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} < -\lambda \quad (2.17)$$

— si $\theta = 0$, alors

$$\nabla_{f,\theta}(\theta) = -\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} + \lambda[-1, 1] \quad (2.18)$$

donc

$$\nabla_{f,\theta}(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} \in [-\lambda, \lambda] \quad (2.19)$$

On peut finalement donner la solution du problème (2.10)

$$\theta = \begin{cases} \frac{\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} - \lambda}{\tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}}} & \text{si } \tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} > \lambda \\ 0 & \text{si } \tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} \in [-\lambda, \lambda] \\ \frac{\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} + \lambda}{\tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}}} & \text{si } \tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}} < -\lambda \end{cases} . \quad (2.20)$$

On peut alors exprimer cette solution en fonction d'un opérateur de seuillage doux défini par

$$\mathcal{S}_\lambda(u) = \begin{cases} u - \lambda & u > \lambda \\ 0 & \text{si } u \in [-\lambda, \lambda] \\ u + \lambda & u < -\lambda \end{cases} \quad (2.21)$$

qui donne comme solution de (2.10)

$$\theta = \frac{\mathcal{S}_\lambda(\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{h}})}{\tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}}} . \quad (2.22)$$

Pour en déduire la solution du problème général (2.9), avec $i \in \{1, \dots, n\}$, on peut alors résoudre le problème (2.9) en séparant la contribution de la i -ème composante de $\boldsymbol{\theta}$, notée θ_i . Pour cela, on note $\tilde{\mathbf{h}}_i$ la i -ème colonne de $\tilde{\mathbf{H}}$, $\boldsymbol{\theta}^{(-i)} = [\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, 0, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n]$ et $\tilde{\mathbf{y}}_i = \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}^{(-i)}$. On a alors

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}}_i - \tilde{\mathbf{h}}_i \theta_i\|_2^2 + \lambda |\theta_i| + \lambda \sum_{j=1, j \neq i}^n |\theta_j|. \quad (2.23)$$

En supposant que toutes les composantes de $\boldsymbol{\theta}$ ont été trouvées sauf la i -ème, il suffit de résoudre

$$\arg \min_{\theta_i \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{y}}_i^T \tilde{\mathbf{y}}_i + \tilde{\mathbf{h}}_i^T \tilde{\mathbf{h}}_i \theta_i^2 - 2\tilde{\mathbf{y}}_i^T \tilde{\mathbf{h}}_i \theta_i) + \lambda |\theta_i| \quad (2.24)$$

dont la solution est

$$\theta_i = \frac{\mathcal{S}_\lambda(\tilde{\mathbf{y}}_i^T \tilde{\mathbf{h}}_i)}{\tilde{\mathbf{h}}_i^T \tilde{\mathbf{h}}_i}. \quad (2.25)$$

Si on répète cette opération pour chaque composante du vecteur $\boldsymbol{\theta}$ un grand nombre de fois, la convexité du problème (2.9) garantit la convergence de l'algorithme itératif vers la solution unique du problème. On en déduit donc l'algorithme 1¹ qui fournit la solution du problème LASSO (2.9). Cependant cette relaxation de la pseudo-norme ℓ_0 par une norme

Algorithme 1 Algorithme *Shooting* pour résoudre le problème LASSO

```

Initialiser  $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{t-1}$ 
tant que  $\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_{t-1}\|_\infty \leq \varepsilon$  faire
   $\boldsymbol{\theta}_{t-1} = \boldsymbol{\theta}$ 
  pour  $i = 1, \dots, n$  faire
     $\boldsymbol{\theta}^{(-i)} \leftarrow \boldsymbol{\theta}$ 
     $\boldsymbol{\theta}^{(-i)}[i] \leftarrow 0$ 
     $\boldsymbol{\theta}[i] \leftarrow \frac{\mathcal{S}_\lambda((\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}^{(-i)})^T \tilde{\mathbf{h}}_i)}{\tilde{\mathbf{h}}_i^T \tilde{\mathbf{h}}_i}$ 
  fin pour
fin tant que

```

ℓ_1 est très forte, comme cela a par exemple été montré dans Candès et al. [2008], et dans certains cas, d'autres pénalisations sont plus efficaces que la norme ℓ_1 , qui va donner de mauvais estimateurs du vecteur cherché.

2.2.2 Reweighted ℓ_1

Il est possible que la valeur de $\boldsymbol{\theta}$ solution qui minimise le critère (2.9) soit atteint par un autre vecteur que celui cherché, comme cela est illustré dans la figure 2.1. Cela arrive notamment lorsque le vecteur à estimer a une composante non nulle d'amplitude importante. Il est alors moins coûteux d'annuler la composante correspondante de $\boldsymbol{\theta}$. Pour pallier ce

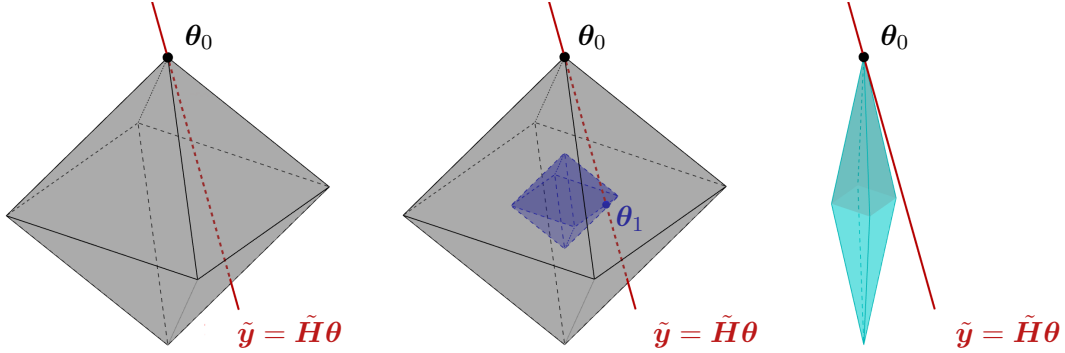


FIGURE 2.1 – De gauche à droite : (a) Vecteur parcimonieux $\boldsymbol{\theta}_0$ à estimer, contrainte $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}$, et boule ℓ_1 de rayon $\|\boldsymbol{\theta}_0\|_1$. (b) Existence d'un vecteur $\boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_0$ tel que $\|\boldsymbol{\theta}_1\|_1 < \|\boldsymbol{\theta}_0\|_1$ et vérifiant la contrainte. (c) Boule ℓ_1 pondérée : il n'y a pas de vecteur $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$ vérifiant la contrainte tel que $\|\mathbf{W}\boldsymbol{x}\|_1 \leq \|\mathbf{W}\boldsymbol{x}_0\|_1$, où \mathbf{W} est une matrice de pondération, d'après Candès et al. [2008].

problème, Candès dans Candès et al. [2008] propose une relaxation convexe de la forme suivante

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{W}\boldsymbol{\theta}\|_1 \quad (2.26)$$

avec $\mathbf{W} = \text{diag}(w_i)_{i=1, \dots, n}$ une matrice de pondération. Cela revient à remplacer dans la ligne 6 de l'algorithme 1 la fonction \mathcal{S}_λ par $\mathcal{S}_{\lambda w_i}$ (le seuillage n'est donc pas le même sur chacune

1. un code pour algorithme est disponible à l'adresse <http://perso.tesa.prd.fr/jlesouple/codes.html>

des composantes), ce qui est présenté dans l'algorithme 2. D'autre part, si on fixe

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{|\theta_{0,i}|}, & \theta_{0,i} \neq 0 \\ \infty, & \theta_{0,i} = 0 \end{cases}, \quad (2.27)$$

où θ_0 est le vecteur cherché, on a dans ce cas $\|\mathbf{W}\theta_0\|_1 = \|\theta_0\|_0$. En revanche cette matrice de pondération \mathbf{W} n'est pas calculable en pratique puisqu'on ne connaît pas le vecteur θ_0 . Les auteurs de Candès et al. [2008] proposent la solution itérative donnée dans l'algorithme 3, où le paramètre ϵ permet d'éviter les divisions éventuelles par 0. Cette méthode nous per-

Algorithme 2 Algorithme *Shooting* pour résoudre le problème *Weighted- ℓ_1* avec \mathbf{W} fixée

Initialiser θ
tant que non-convergence **faire**
 pour $i = 1, \dots, n$ **faire**
 $\theta^{(-i)} \leftarrow \theta$
 $\theta^{(-i)}[i] \leftarrow 0$
 $\theta[i] \leftarrow \frac{S_{\lambda w_i}((\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{H}\theta^{(-i)})^T \mathbf{h}_i)}{\mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_i}$
 fin pour
fin tant que

Algorithme 3 Algorithme *Reweighted- ℓ_1* pour résoudre le problème *Weighted- ℓ_1* sans connaissance de \mathbf{W}

Initialiser \mathbf{W}
pour $\ell = 0, \dots, \ell_{\max}$ **faire**
 Résoudre $\theta^{(\ell)} = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{H}}\theta\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{W}^{(\ell)}\theta\|_1$, via 2 par exemple
 Mettre à jour les poids par
 pour $i = 1, \dots, n$ **faire**
 $w_i^{(\ell+1)} = \frac{1}{\theta_i^{(\ell)} + \epsilon}$
 fin pour
fin pour

mettra d'apporter une information a priori sur la présence ou non de biais dans le vecteur à estimer. D'autre part, comme nous effectuons un filtrage temporel de la position, il peut être intéressant d'ajouter un lissage temporel, ce qui fera l'objet de la section 2.3.4.1.

2.2.3 Fused LASSO

Il est possible de coupler estimation parcimonieuse et lissage, comme cela a été fait dans Tibshirani et al. [2005] où a été défini le problème *Fused LASSO* suivant

$$\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{H}}\theta\|_2^2 + \lambda \|\theta\|_1 + \mu \sum_{i=2}^n |\theta_i - \theta_{i-1}|. \quad (2.28)$$

Nous ne donnerons pas d'algorithme pour résoudre ce problème, car nous ne l'utiliserons pas tel quel. Cependant la méthode employée précédemment pour l'algorithme 1 marche aussi pour ce problème.

2.3 Application à l'estimation des multitrajets en GNSS

Maintenant que nous avons présenté l'estimation parcimonieuse, nous allons expliquer comment celle-ci peut être bénéfique à la correction des multitrajets dans les mesures GNSS. Ces travaux ont été publiés dans Lesouple et al. [2018c] et ont fait l'objet d'un dépôt de brevet Lesouple et al. [2017].

2.3.1 Formulation du problème

Reprenant ce qui a été fait dans la partie 1.6, nous obtenons le modèle suivant

$$\boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{F}_{k-1}\boldsymbol{\xi}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{u}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{u}_{k-1}; \mathbf{0}, \mathbf{Q}_{k-1}) \quad (2.30)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k \quad (2.31)$$

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\xi}_k - \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{n}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_k; \mathbf{0}, \mathbf{R}_k). \quad (2.33)$$

Nous avons vu que cette modélisation est valable en l'absence de multitrajet. Afin d'améliorer la méthode de référence résumée dans la partie 1.7, nous allons prendre en compte l'impact des multitrajets, et pour cela nous allons utiliser le modèle présenté par exemple dans [Giremus et al. \[2007\]](#), et ainsi réécrire (2.31) comme

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{m}_k + \mathbf{n}_k \quad (2.34)$$

où le vecteur de biais \mathbf{m}_k désigne la contribution des multitrajets à l'erreur de mesure à l'instant k , et dont une formulation explicite est donnée en annexe B.2. L'hypothèse majeure faite dans cette thèse est que le vecteur \mathbf{m}_k à estimer est parcimonieux, i.e., que certaines de ses composantes sont nulles, i.e., que parmi toutes les mesures reçues par le récepteur, certaines ne vont pas souffrir d'un biais dû à d'éventuels multitrajets. La stratégie employée est alors de venir rajouter un bloc dans la figure 1.22 qui va venir estimer le vecteur \mathbf{m}_k grâce à une hypothèse de parcimonie afin de le fournir en entrée du bloc de mise à jour du filtre de Kalman en plus du vecteur \mathbf{y}_k . En s'inspirant du problème (2.26), nous proposons de résoudre le problème suivant

$$\arg \min_{\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k} \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k\|_2^2 + \lambda_k \|\mathbf{W}_k\mathbf{m}_k\|_1 \quad (2.35)$$

qui cherche donc à expliquer les données par l'équation (2.34) grâce au terme de gauche, tout en imposant de la parcimonie dans le vecteur \mathbf{m}_k . Si on n'avait pas rajouté cette contrainte de parcimonie, le problème de minimisation du terme d'attache aux données aurait été sous-déterminé avec une infinité de solutions. Par exemple, les vecteurs $(\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_0)$ avec \mathbf{x}_0 quelconque fournissent la même fonction de coût (2.35). D'autre part, nous avons choisi la formulation pondérée car, comme nous le montrerons dans les expérimentations, la formulation LASSO ne donne pas tout le temps de bons résultats. Ainsi, l'algorithme 3 a été testé dans un premier temps, sans donner de résultats convaincants (dû aux faibles dimensions avec lesquelles nous travaillons, typiquement $n = 8$ et $m = 2s_k$ donc 16 pour 8 satellites). Nous devons penser à une stratégie semblable, et repenser à l'utilité des poids dans la matrice \mathbf{W}_k . Pour une composante m_i , nous avons représenté différentes pénalités dans la figure 2.2. Comme on peut le voir sur cette dernière figure, plus une composante se voit attribuer un poids faible, moins sa contribution à la fonction coût est importante, et inversement. On permet alors à l'estimateur d'autoriser des larges valeurs pour les composantes de poids faibles. Si on peut fournir une information a priori sur la présence ou l'absence de multitrajet, et qu'on est capable de traduire cette information dans une matrice de poids \mathbf{W}_k , on peut alors utiliser l'estimation ℓ_1 pondérée pour essayer de corriger les erreurs de mesures dues aux multitrajets dans la méthode de référence. Comme discuté dans la partie 1.5, l'élévation θ_i et le C/N_0 peuvent être utilisés comme indicateurs de présence de multitrajet sur un signal satellite², et nous allons donc définir une matrice de pondération en fonction de ces deux paramètres.

2. N.B., il existe dans la littérature des indicateurs de multitrajets plus performants que les deux proposés ici, qui se situent au niveau des corrélateurs ou des discriminateurs. Cependant nous souhaitons travailler sur les données brutes fournies par un récepteur bas-coût (fichier .ubx d'un récepteur Ublox par exemple), qui n'implémentent pas ces indicateurs par soucis de coût.

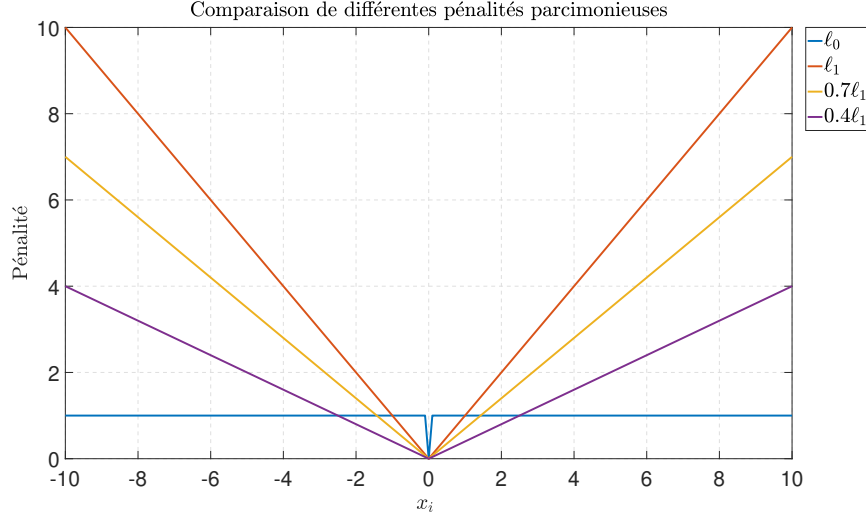


FIGURE 2.2 – Comparaison des différentes pénalités présentées précédemment.

2.3.2 Définition des poids

2.3.2.1 Pondération du C/N_0

Pour construire la matrice de pondération, on voudrait que les satellite avec un fort C/N_0 soient favorisés car ils sont moins sujets aux multitrajets. Au contraire, plus le C/N_0 s'éloigne d'une valeur nominale prédéfinie, plus on voudrait autoriser l'algorithme à estimer des valeurs importantes du biais de mesure du satellite correspondant, et donc avoir un poids faible. Comme les poids peuvent être définis à une constante multiplicative près (quitte à changer la valeur du paramètre de régularisation λ_k dans (2.35)), nous avons supposé sans perte de généralité que les satellites avec un fort C/N_0 ont un poids égal à 1. Ensuite pour la décroissance de la fonction de pondération, nous avons choisi la fonction proposée dans [Realini et Reguzzoni \[2013\]](#), définie par

$$w_1(x) = \begin{cases} 10^{\frac{x-T}{a}} \left(\left(A \times 10^{\frac{F-T}{a}} - 1 \right) \frac{x-T}{F-T} + 1 \right)^{-1}, & x < T \\ 1, & x \geq T \end{cases}$$

où

- x est le C/N_0 du satellite correspondant, exprimé en dBHz
- T est un seuil au-delà duquel le poids est égal à 1 (et indique donc une mesure “propre”)
- a contrôle la courbure de la courbe, comme le montre la figure 2.3
- F permet de fixer la valeur de C/N_0 pour laquelle la fonction w_1 vaut A
- A contrôle la valeur de la fonction w_1 en $x = F$ ($w_1(F) = 1/A$).

La figure 2.3 montre l'évolution de différentes fonctions de pondération w_1 pour différentes valeurs de a . Comme on peut le constater, cette fonction vaut 1 pour la valeur nominale $C/N_0 \approx 45$ dBHz, et est une fonction croissante de C/N_0 (et donc limite la contribution des mesures correspondant à des satellites ayant un faible C/N_0). Pour déterminer les valeurs appropriées de (T, a, F, A) dans la fonction w_1 , nous avons effectué une procédure de validation croisée basée sur des expériences réalistes. Nous verrons que le quadruplet $(T, a, F, A) = (45, 80, 20, 30)$ est adapté à notre étude et que les performances d'estimation ne sont pas très sensibles aux valeurs de T, a, F and A , pourvu que ces paramètres ne soient pas trop petits.

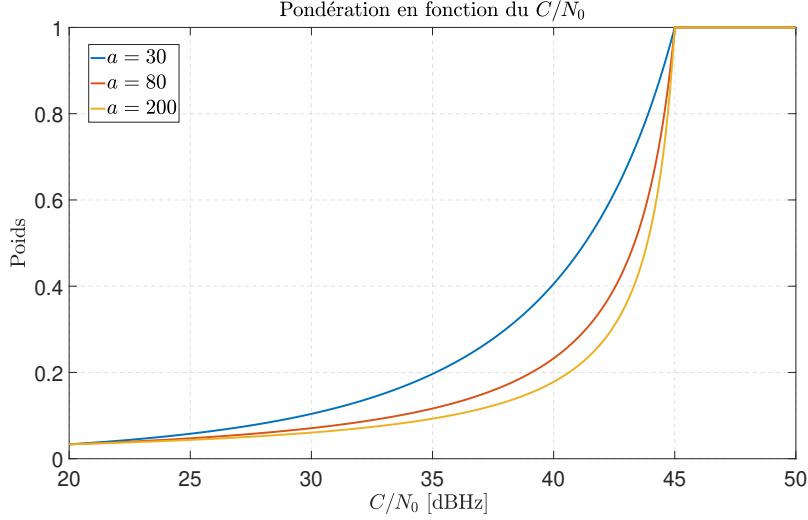


FIGURE 2.3 – Fonction de pondération $w_1(C/N_0)$ pour différentes valeurs de a ($A = 30$, $F = 20$ dBHz et $T = 45$ dBHz).

2.3.2.2 Pondération de l'élévation θ_i

Un autre paramètre que l'on peut prendre en compte pour la pondération des signaux est l'élévation des satellites. Dans les méthodes classiques de navigation, il est d'usage de définir un masque d'élévation, entre 5° et 10° , c'est à dire que les satellites qui ont une élévation inférieure à ce masque sont écartés du calcul du point [Groves, 2008a, Chap. 7.4.2]. Cependant, en environnement urbain, étant donné le peu de satellites visibles, il est important de pouvoir garder le plus grand nombre de satellites possible, d'autant plus si on souhaite imposer une hypothèse de parcimonie pour la solution du problème d'estimation considéré. En conséquence, nous proposons de réduire l'impact des satellites qui ont une faible élévation sans les éliminer. Il y a plusieurs manières de définir un poids satisfaisant cette propriété, et nous proposons de suivre ce qui a été fait dans Realini et Reguzzoni [2013]. En voulant pénaliser les satellites qui ont une élévation inférieure à θ_0 , nous considérons la fonction de pondération suivante

$$w_2(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(\theta_0)} & x < \theta_0 \\ 1 & x \geq \theta_0 \end{cases} \quad (2.36)$$

où

- x est l'élévation du satellite en degré
- θ_0 et la valeur maximale d'élévation que l'on souhaite pondérer.

La figure 2.4 montre l'évolution de la fonction de pondération w_2 pour différentes valeurs de θ_0 . Cette fonction vaut 1 au-delà de l'élévation maximale que l'on souhaite pénaliser. Comme nous le verrons dans les expérimentations, la valeur θ_0 a été fixée à 5° par validation croisée (cette valeur pourra par exemple être ajustée en fonction de l'environnement dans lequel se déplace le véhicule). Cette valeur peut paraître faible, mais elle montre juste que le C/N_0 est le principal indicateur de multitrajet considéré par notre méthode. Le poids final avec lequel nous allons définir la matrice de pondération pour l'approche ℓ_1 pondérée est défini comme le produit des deux fonctions précédentes pour chaque satellite, i.e.,

$$w [(C/N_0)_i, \theta_i] = w_1 [(C/N_0)_i] w_2(\theta_i) \quad (2.37)$$

où $(C/N_0)_i$ et θ_i désignent respectivement le C/N_0 et l'élévation associés au satellite i . Nous proposons d'autre part d'associer le même poids à la i -ème pseudodistance et la i -ème pseudo-vitesse, puisque ces mesures proviennent du même satellite, ce qui donne $w_{s_k+i} = w_i$. On peut

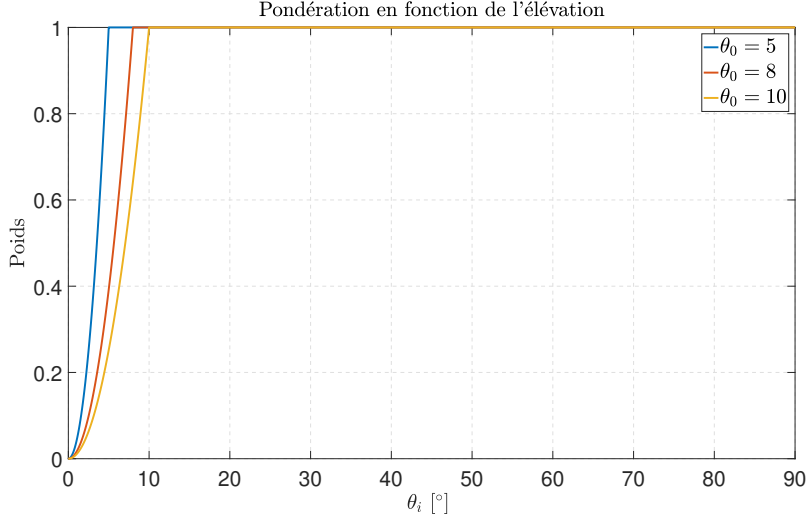


FIGURE 2.4 – Fonction de pondération $w_2(\theta_i)$ pour différentes valeurs de θ_0 .

remarquer que par construction, le poids $w[(C/N_0)_i, \theta_i]$ se situe dans l'intervalle $]0, 1]$. Finalement, il est important de noter que les paramètres C/N_0 et θ sont accessibles facilement, puisque le C/N_0 est directement estimé par le récepteur, et l'élévation se calcule simplement, comme montré dans la partie 1.3.2.2 à l'aide de la position précédente et de la position de chacun des satellites (que l'on a pu calculer grâce aux éphémérides transmis dans le message de navigation). Si on observe le problème (2.35), on se rend compte que notre formulation diffère du problème LASSO (2.9) et du problème LASSO pondéré (2.26). La section suivante explique comment déterminer la solution du problème (2.35).

2.3.3 Résolution du problème

La solution du problème (2.34) à \mathbf{m}_k fixé est connue et s'exprime sous la forme suivante

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,\text{MC}} = (\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{y}_k - \mathbf{m}_k) \quad (2.38)$$

que l'on peut remplacer dans (2.35) pour obtenir

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k} & \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k (\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{y}_k - \mathbf{m}_k) - \mathbf{m}_k\|_2^2 + \lambda_k \|\mathbf{W}_k \mathbf{m}_k\|_1 \\ \arg \min_{\mathbf{m}_k} & \frac{1}{2} \|(I_{2s_k} - \mathbf{H}_k (\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T) \mathbf{y}_k - (I_{2s_k} - \mathbf{H}_k (\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T) \mathbf{m}_k\|_2^2 + \lambda_k \|\mathbf{W}_k \mathbf{m}_k\|_1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

On définit alors

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{H}_k} = \mathbf{H}_k (\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \quad (2.40)$$

qui est la matrice de projection sur le sous-ensemble engendré par les colonnes de la matrice \mathbf{H}_k , noté

$$\text{Vec}(\mathbf{H}_k) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2s_k} : \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^8, \mathbf{y} = \mathbf{H}_k \mathbf{x} \right\}, \quad (2.41)$$

et donc la matrice $I_{2s_k} - \mathbf{\Pi}_{\mathbf{H}_k}$ est la matrice de projection sur l'orthogonal de cet espace. Le problème que nous considérons est donc équivalent à rechercher le vecteur parcimonieux de \mathbb{R}^{2s_k} dont la projection dans l'orthogonal de \mathbf{H}_k est la même que celles des mesures \mathbf{y}_k . Une illustration en dimension 3 est donnée dans la figure 2.5, dans laquelle, et pour la suite du problème, on introduit les notations suivantes :

- $\tilde{\mathbf{y}}_k = (I_{2s_k} - \mathbf{\Pi}_{\mathbf{H}_k}) \mathbf{y}_k$ est la projection des mesures \mathbf{y}_k sur l'orthogonal de $\text{Vec}(\mathbf{H}_k)$

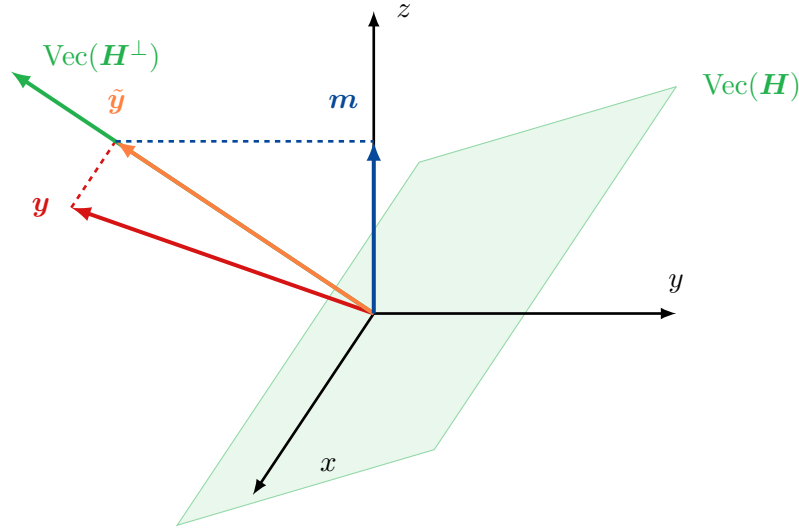


FIGURE 2.5 – Illustration du problème présenté en 3 dimensions.

- $\tilde{\mathbf{H}}_k = (I_{2s_k} - \mathbf{\Pi}_{\mathbf{H}_k})\mathbf{W}_k^{-1}$ est la matrice de projection sur l'orthogonal de $\text{Vec}(\mathbf{H}_k)$ pondérée par les inverses des poids du problème
- $\boldsymbol{\theta}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{m}_k$ est le vecteur des biais multitrajet \mathbf{m}_k pondéré par les poids du problème, à ne pas confondre avec les élévations θ_i .

Le problème (2.39) se réécrit alors

$$\arg \min_{\mathbf{m}_k} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}}_k - \tilde{\mathbf{H}}_k \boldsymbol{\theta}_k\|_2^2 + \lambda_k \|\boldsymbol{\theta}_k\|_1. \quad (2.42)$$

qui est un problème LASSO (2.9) que l'on sait résoudre via l'algorithme 1. Remarquons qu'on aurait pu se passer de la variable intermédiaire $\boldsymbol{\theta}_k$, et résoudre le problème

$$\arg \min_{\mathbf{m}_k} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}}_k - (I_{2s_k} - \mathbf{\Pi}_{\mathbf{H}_k})\mathbf{m}_k\|_2^2 + \lambda_k \|\mathbf{W}_k \mathbf{m}_k\|_1 \quad (2.43)$$

que l'on sait aussi résoudre via l'algorithme 2.

2.3.4 Variantes de l'algorithme

2.3.4.1 Lissage temporel des biais estimés

La méthode développée dans la section précédente ne considère aucun lissage temporel des biais. Cependant nous avons pu constater lors de nos expérimentations que parfois la pondération était contradictoire avec la présence d'un biais. Notamment, il est possible qu'il y ait un biais sur la mesure et que le C/N_0 correspondant soit élevé. La conséquence va être de donner un poids important à ce biais dans la fonction coût, et il va alors devenir moins coûteux d'associer 0 qu'un biais important, ce qui n'aurait pas été le cas si le poids correspondant avait été faible. Cette situation est représentée dans la figure 2.6, où connaissant la position de référence nous avons pu estimer le biais de mesure théorique sur la pseudovitesse du satellite #13. L'estimation du biais semble convenable jusqu'à la droite en pointillés verts où l'algorithme cesse brutalement d'estimer le biais (on passe d'une valeur d'une dizaine de mètres par seconde à 0). On constate que parallèlement à ce phénomène, le C/N_0 correspondant a une valeur nominale, avec un poids proche de 1, et il devient alors moins coûteux d'estimer 0 à la composante correspondante du vecteur de biais. Pour pallier ce cas de figure, nous avons voulu ajouter un lissage temporel dans notre méthode d'estimation des biais, i.e., tenir compte de la valeur estimée du biais à l'instant précédent l'instant courant **Lesouple**

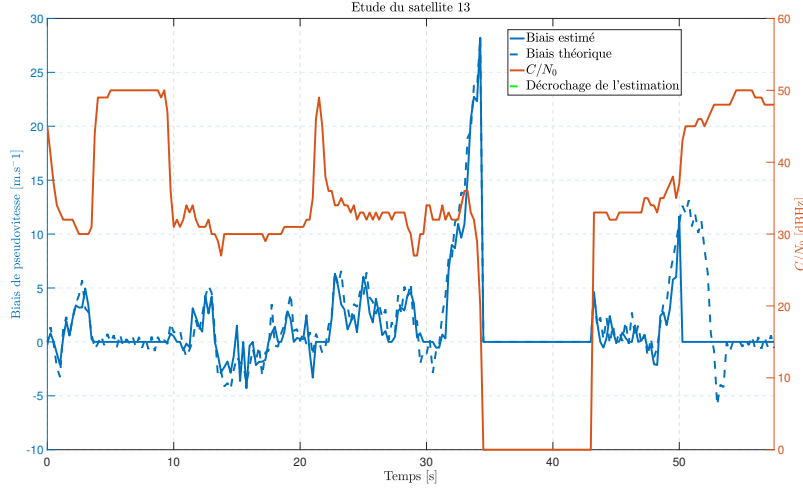


FIGURE 2.6 – Illustration de la contradiction entre la valeur de biais théorique et le poids correspondant. N.B., la zone où tous les paramètres sont nuls correspond à un masquage du satellite (son signal n'est pas reçu par le récepteur).

et al. [2018b]. Pour ce faire, nous nous sommes inspirés du problème Fused LASSO, décrit dans la section 2.2.3, conduisant à la résolution du problème suivant

$$\arg \min_{\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k} \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k\|_2^2 + \lambda_k \|\mathbf{W}_k \mathbf{m}_k\|_1 + \mu_k \|\mathbf{W}_k (\mathbf{m}_k - \hat{\mathbf{m}}_{k-1})\|_1. \quad (2.44)$$

La différence entre la résolution de (2.44) et du problème Fused LASSO (2.28) concerne la dimension sur laquelle est effectué le lissage. En effet, dans (2.28), on remarque que le lissage se fait sur toutes les composantes du vecteur à estimer, ce qui reviendrait grossièrement à estimer les mêmes amplitudes de multitrajet pour chaque satellite si on l'appliquait à notre problème, ce qui n'a pas vraiment de sens. On préfère alors ajouter un lissage dans le domaine temporel, et donc limiter l'écart avec le biais estimé à l'instant précédent. D'autre part, on voudrait que ce lissage soit plus important lorsque le poids correspondant est élevé (car c'est dans ces circonstances que des problèmes peuvent apparaître), i.e., on voudrait encourager $\hat{m}_{i,k} = \hat{m}_{i,k-1}$ pour $w_i = 1$, ce qui revient donc à définir un poids égal à 1 dans la pénalité ℓ_1 du terme de lissage. C'est pourquoi nous considérons la même matrice \mathbf{W}_k pour les deux termes de pénalisation. A l'aide des mêmes notations que dans la partie 2.3.3, le problème (2.44) peut se réécrire

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta}_k} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}}_k - \tilde{\mathbf{H}}_k \boldsymbol{\theta}_k\|_2^2 + \lambda_k \|\boldsymbol{\theta}_k\|_1 + \mu_k \|\boldsymbol{\theta}_k - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}\|_1 \quad (2.45)$$

où $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} = \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{m}}_{k-1}$. Afin de résoudre (2.45), nous avons suivi la même démarche que dans la partie 2.2.1.1 pour obtenir l'algorithme Shooting correspondant. Pour cela, nous devons calculer le gradient de la fonction à minimiser et analyser tous les cas possibles. Commençons par le cas unidimensionnel :

$$\arg \min_{\theta_{i,k}} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}}_{i,k} - \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \theta_{i,k}\|_2^2 + \lambda_k |\theta_{i,k}| + \mu_k |(\theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,k-1})| \quad (2.46)$$

où $\theta_{i,k}$ et $\hat{\theta}_{i,k-1}$ sont respectivement la i -ème composante du vecteur $\boldsymbol{\theta}_k$ et la i -ème composante du vecteur $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$, $\tilde{\mathbf{y}}_{i,k} = \tilde{\mathbf{y}}_k - \tilde{\mathbf{H}}_k \boldsymbol{\theta}_k^{(-i)}$, et $\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}$ est la i -ème colonne de la matrice $\tilde{\mathbf{H}}_k$. Ce problème est équivalent à

$$\arg \min_{\theta_{i,k}} \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \theta_{i,k}^2 - 2 \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \theta_{i,k}) + \lambda_k |\theta_{i,k}| + \mu_k |(\theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,k-1})|. \quad (2.47)$$

Le gradient généralisé de la fonction à minimiser est

$$\begin{aligned} & \nabla \left(\frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \theta_{i,k}^2 - 2\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \theta_{i,k}) \right) + \partial(\lambda_k |\theta_{i,k}|) + \partial(\mu_k |\theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,k-1}|) \\ &= \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \theta_{i,k} - \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \lambda_k \partial(|\theta_{i,k}|) + \mu_k \partial(|\theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,k-1}|). \end{aligned} \quad (2.48)$$

D'autre part,

$$\partial(|x|) = \begin{cases} \text{sign}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

Nous allons donc devoir étudier $3^2 = 9$ cas différents, selon les valeurs des deux valeurs absolues de (2.48).

- Cas où $\theta_{i,k} > 0$ et $\theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,k-1} > 0$:

Dans ce cas le gradient généralisé vaut

$$\nabla = \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \theta_{i,k} - \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \lambda_k + \mu_k \quad (2.50)$$

qui est nul pour

$$\theta_{i,k}^* = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} - \lambda_k - \mu_k}{\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}} \quad (2.51)$$

et les conditions donnent

$$\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} > \lambda_k + \mu_k \quad (2.52)$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} > \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} + \lambda_k + \mu_k. \quad (2.53)$$

- Cas où $\theta_{i,k} > 0$ et $\theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,k-1} < 0$:

Dans ce cas le gradient généralisé vaut

$$\nabla = \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \theta_{i,k} - \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \lambda_k - \mu_k \quad (2.54)$$

qui est nul pour

$$\theta_{i,k}^* = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} - \lambda_k + \mu_k}{\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}} \quad (2.55)$$

et les conditions donnent

$$\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} > \lambda_k - \mu_k \quad (2.56)$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} < \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} + \lambda_k - \mu_k. \quad (2.57)$$

- Cas où $\theta_{i,k} < 0$ et $\theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,k-1} > 0$:

Dans ce cas le gradient généralisé vaut

$$\nabla = \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \theta_{i,k} - \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} - \lambda_k + \mu_k \quad (2.58)$$

qui est nul pour

$$\theta_{i,k}^* = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \lambda_k - \mu_k}{\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}} \quad (2.59)$$

et les conditions donnent

$$\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} < -\lambda_k + \mu_k \quad (2.60)$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} > \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} - \lambda_k + \mu_k. \quad (2.61)$$

- Cas où $\theta_{i,k} < 0$ et $\theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,k-1} < 0$:

Dans ce cas le gradient généralisé vaut

$$\nabla = \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \theta_{i,k} - \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} - \lambda_k - \mu_k \quad (2.62)$$

qui est nul pour

$$\theta_{i,k}^* = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \lambda_k + \mu_k}{\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}} \quad (2.63)$$

et les conditions donnent

$$\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} < -\lambda_k - \mu_k \quad (2.64)$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} < \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} - \lambda_k - \mu_k. \quad (2.65)$$

Pour les cas où l'une des deux valeurs absolues seulement est nulle, la solution est plus simple et est décrite ci-dessous.

- Cas où $\theta_{i,k} = 0$ et $\theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,k-1} \neq 0$:

Dans ce cas le gradient généralisé vaut

$$\nabla = -\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \lambda_k [-1, 1] + \mu_k \text{sign}(-\hat{\theta}_{i,k-1}) \quad (2.66)$$

et on cherche à résoudre

$$\begin{aligned} 0 &\in -\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} - \mu_k \text{sign}(\hat{\theta}_{i,k-1}) + \lambda_k [-1, 1] \\ &\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \mu_k \text{sign}(\hat{\theta}_{i,k-1}) \in [-\lambda_k, \lambda_k] \\ &\Leftrightarrow |\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \mu_k \text{sign}(\hat{\theta}_{i,k-1})| \leq \lambda_k. \end{aligned} \quad (2.67)$$

- Cas où $\theta_{i,k} \neq 0$ et $\theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,k-1} = 0$:

Dans ce cas le gradient généralisé vaut

$$\nabla = \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} - \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \lambda_k \text{sign}(\hat{\theta}_{i,k-1}) + \mu_k [-1, 1] \quad (2.68)$$

et on cherche à résoudre

$$\begin{aligned} 0 &\in \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} - \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \lambda_k \text{sign}(\hat{\theta}_{i,k-1}) + \mu_k [-1, 1] \\ &\Leftrightarrow -\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} + \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} - \lambda_k \text{sign}(\hat{\theta}_{i,k-1}) \in [-\mu_k, \mu_k] \\ &\Leftrightarrow |-\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} + \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} - \lambda_k \text{sign}(\hat{\theta}_{i,k-1})| \leq \mu_k. \end{aligned} \quad (2.69)$$

- Cas où $\theta_{i,k} = 0$ et $\theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,k-1} = 0$:

| Condition | Solution |
|--|--|
| $\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} > \lambda_k + \mu_k$ et $\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} > \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} + \lambda_k + \mu_k$ | $\theta_{i,k}^* = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} - \lambda_k - \mu_k}{\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}}$ |
| $\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} > \lambda_k - \mu_k$ et $\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} < \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} + \lambda_k - \mu_k$ | $\theta_{i,k}^* = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} - \lambda_k + \mu_k}{\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}}$ |
| $\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} < -\lambda_k + \mu_k$ et $\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} > \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} - \lambda_k + \mu_k$ | $\theta_{i,k}^* = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \lambda_k - \mu_k}{\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}}$ |
| $\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} < -\lambda_k - \mu_k$ et $\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} < \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} - \lambda_k - \mu_k$ | $\theta_{i,k}^* = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \lambda_k + \mu_k}{\tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}}$ |
| $ \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \mu_k \text{sign}(\hat{\theta}_{i,k-1}) \leq \lambda_k$ et $\hat{\theta}_{i,k-1} \neq 0$ | $\theta_{i,k}^* = 0$ |
| $ \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} - \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \hat{\theta}_{i,k-1} - \lambda_k \text{sign}(\hat{\theta}_{i,k-1}) \leq \mu_k$ et $\hat{\theta}_{i,k-1} \neq 0$ | $\theta_{i,k}^* = \hat{\theta}_{i,k-1}$ |
| $ \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} \leq \lambda_k + \mu_k$ et $\hat{\theta}_{i,k-1} = 0$ | $\theta_{i,k}^* = 0$ |

TABLEAU 2.1 – Solution du problème unidimensionnel.

Dans ce cas le gradient généralisé vaut

$$\nabla = -\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \lambda_k[-1, 1] + \mu_k[-1, 1] \quad (2.70)$$

et on cherche à résoudre

$$\begin{aligned} 0 &\in -\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} + \lambda_k[-1, 1] + \mu_k[-1, 1] \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k} &\in [-(\lambda_k + \mu_k), \lambda_k + \mu_k] \\ \Leftrightarrow |\tilde{\mathbf{y}}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{h}}_{i,k}| &\leq \lambda_k + \mu_k \end{aligned} \quad (2.71)$$

La solution finale du problème est résumée dans la table 2.1. Pour le cas multidimensionnel, il suffit d'appliquer le même raisonnement que dans la partie 2.2.1.1 et itérer suivant chaque dimension jusqu'à convergence de l'algorithme (garantie par la convexité de la fonction à minimiser).

2.3.4.2 Estimation robuste de la matrice de covariance

Une autre façon d'améliorer la méthode est de changer la méthode d'estimation de la matrice de covariance du bruit \mathbf{R}_k . En effet, la manière dont elle est définie dans (1.73) fait que les bruits $\mathbf{n}_{p,k}$ (pseudodistances), et $\mathbf{n}_{r,k}$ (pseudovitesse) sont des bruits blancs, de variances respectives σ_p^2 et σ_r^2 . Cependant, on peut essayer par exemple d'estimer la matrice de covariance en accordant plus ou moins d'importance à chaque mesure, par exemple en fonction de son élévation, ce qui revient à dire que les mesures en lesquelles on a le moins confiance sont supposées avoir une variance élevée et inversement. Cette technique est très répandue en GNSS [Carcanague et al. \[2013\]](#); [Groves et Jiang \[2013\]](#); [Rao et al. \[2004\]](#); [Tay et Marais \[2013\]](#). D'autres techniques cherchent à estimer cette matrice par une méthode itérative afin d'obtenir une cohérence entre les paramètres estimés, les données, et la matrice de covariance [Fox et Weisberg \[2013\]](#). Nous allons présenter ici une technique itérative appelée IRLS *Iteratively Reweighted Least Squares*, [Carcanague \[2013\]](#); [Kuusniemi \[2005\]](#). Pour cela, on suppose que les mesures ne sont pas biaisées comme dans (1.70), et on rappelle la solution moindres carrés pondérés (cf., 1.6.1)

$$\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{H}_k^T \mathbf{D} \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{D} \mathbf{y}_k \quad (2.72)$$

où \mathbf{D} est une matrice de poids avec idéalement $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{R}_k$. On note également $\hat{\mathbf{v}}_k$ le résidu d'estimation défini par

$$\hat{\mathbf{v}}_k = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{y}_k \quad (2.73)$$

$$= -(\mathbf{I}_{S_k} - (\mathbf{H}_k^T \mathbf{D} \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{D}) \mathbf{y}_k \quad (2.74)$$

et $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}_k}$ la matrice de covariance des résidus

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}_k} = \mathbf{D} - \mathbf{H}_k (\mathbf{H}_k^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T. \quad (2.75)$$

Une méthode d'estimation appelée "Danish method", ou méthode Danoise [Krarup et al. \[1980\]](#) consiste à définir des poids a priori définis à partir des résidus normalisés d'estimation, de manière à diminuer le poids des résidus trop élevés. Cette technique a fait ses preuves dans de nombreux cas pratiques même si elle est difficile à justifier théoriquement. La méthode Danoise commence par définir une première variance a priori pour chaque mesure, notée $\sigma_{i,0}^2$ pour la i -ème mesure, par exemple à partir des poids donnés dans [Carcanague \[2013\]](#). Pour un instant k fixé, les poids de \mathbf{D} et les variances des mesures sont mis à jour itérativement. Pour cela, à chaque itération j , la variance de chaque mesure i est modifiée comme suit³

$$\sigma_{i,j+1}^2 = \sigma_{i,0}^2 \times \begin{cases} \exp\left(\frac{w_{i,j}}{T}\right) & \text{si } w_{i,j} > T \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.76)$$

avec

$$w_{i,j} = \left| \frac{(\hat{\mathbf{v}}_{j,k})_i}{\sqrt{(\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}_{1,k}})_{ii}}} \right| \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_{j,k} &= \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{j,k} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k (\mathbf{H}_k^T \mathbf{D}_{j,k} \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{D}_{j,k}) \mathbf{y}_k \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}_{1,k}} = (\mathbf{H}_k^T \mathbf{D}_{1,k} \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{D}_{1,k} \quad (2.79)$$

$$\mathbf{D}_{j,k} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_{i,j}^2} \right) \quad (2.80)$$

$$T = F^{-1} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \quad (2.81)$$

où les poids $w_{i,j}$ sont les résidus d'estimation normalisés mis à jour à chaque itération, F^{-1} est l'inverse de la fonction répartition de la loi normale centrée réduite et α_0 est la probabilité de fausse alarme requise. On pénalise donc exponentiellement les variances a priori lorsque les résidus normalisés dépassent le seuil T , défini à l'aide de la fonction de répartition inverse de la loi normale centrée réduite, et on garde celles dont les résidus normalisés sont inférieurs à T . Après convergence, on peut estimer la matrice de covariance des mesures $\hat{\mathbf{R}}_k$ par

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \mathbf{D}_{J,k}^{-1} \quad (2.82)$$

où J désigne la dernière itération, i.e., celle où la convergence de l'algorithme IRLS a été atteinte.

Nous avons donc proposé dans [Lesouple et al. \[2018a\]](#) de coupler l'estimation des biais multitrajets précédente avec cette méthode d'estimation robuste de la matrice de covariance. Pour cela, dans une première étape nous estimons les biais multitrajets avec une pénalité ℓ_1 pondérée (et éventuellement, lissage temporel), corrigeons les mesures (en retranchant le vecteur de biais estimé), et appliquons la méthode Danish à ces mesures corrigées.

2.4 Résultats expérimentaux

Cette partie va nous permettre d'apprécier au travers de données simulées et réelles les performances de la méthode proposée⁴.

3. N.B., pour les variances, afin de ne pas surcharger les notations, on n'indique pas l'indice temporel k

4. La plupart des codes utilisés ici sont disponibles à l'adresse <http://perso.tesa.prd.fr/jlesouple/codes.html>

2.4.1 Données synthétiques

Les données synthétiques considérées dans cette section ont été générées à l'aide d'un vecteur d'état de référence défini par (2.29) et les mesures correspondantes définies par (2.31) avec 8 satellites. La durée de la simulation est $K = 500$ instants, et les résultats ont été moyennés à l'aide de 200 itérations de Monte Carlo. Nous avons de plus généré des biais additifs artificiels, pour modéliser l'impact des multitrajets, qui vont venir corrompre les mesures (pseudodistances et pseudovitesse) entre les instants $k = 50$ et $k = 150$ pour les satellites #1, #5 et #6. Les amplitudes des biais ont été fixées à 80, 60 et 40 mètres respectivement pour les pseudodistances, et 5, 12 et 4 mètres par seconde respectivement pour les pseudovitesse. Les positions des satellites ont été générées d'après des éphémérides réelles de manière à être plus réalistes⁵. Finalement, une valeur de C/N_0 a été générée pour chaque satellite de la manière suivante

$$(C/N_0)_{i,k} \sim \begin{cases} \mathcal{U}_{[45,48]}((C/N_0)_{i,k}) & \text{en absence de multitrajet sur le satellite } \#i \text{ à l'instant } k \\ \mathcal{U}_{[30,33]}((C/N_0)_{i,k}) & \text{en présence de multitrajet sur le satellite } \#i \text{ à l'instant } k \end{cases} \quad (2.83)$$

où $\mathcal{U}_{[a,b]}(\cdot)$ désigne la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. La méthode d'estimation des biais proposée a ensuite été comparée aux résultats obtenus par un algorithme Shooting résolvant un problème LASSO classique et un algorithme ℓ_1 repondéré (algorithme 3). Dans un premier temps, nous présentons les résultats de validations croisées ayant permis de déterminer les divers paramètres de la méthode (paramètres de la fonction de pondération et paramètre de régularisation λ_k). Nous choisissons pour ces simulations les paramètres suivants $(T, a, F, A, \lambda_k) =$

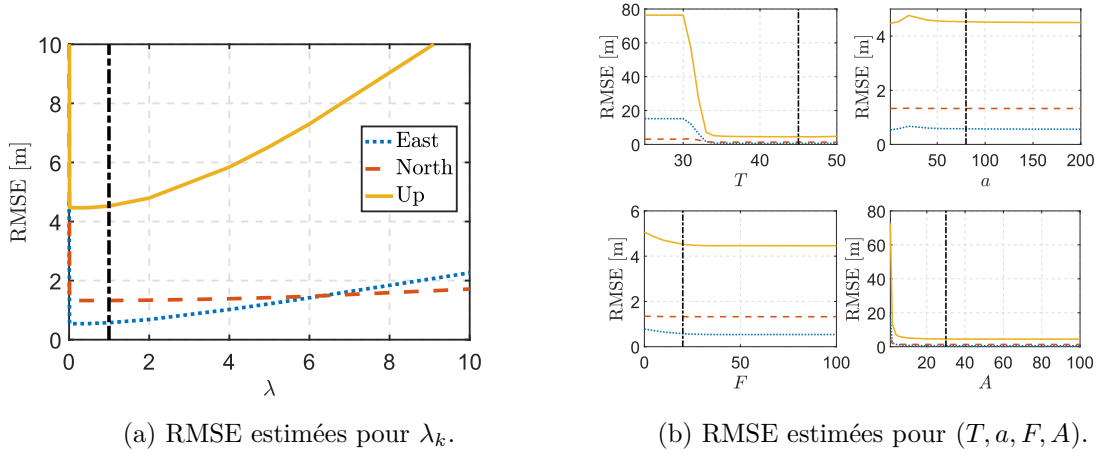
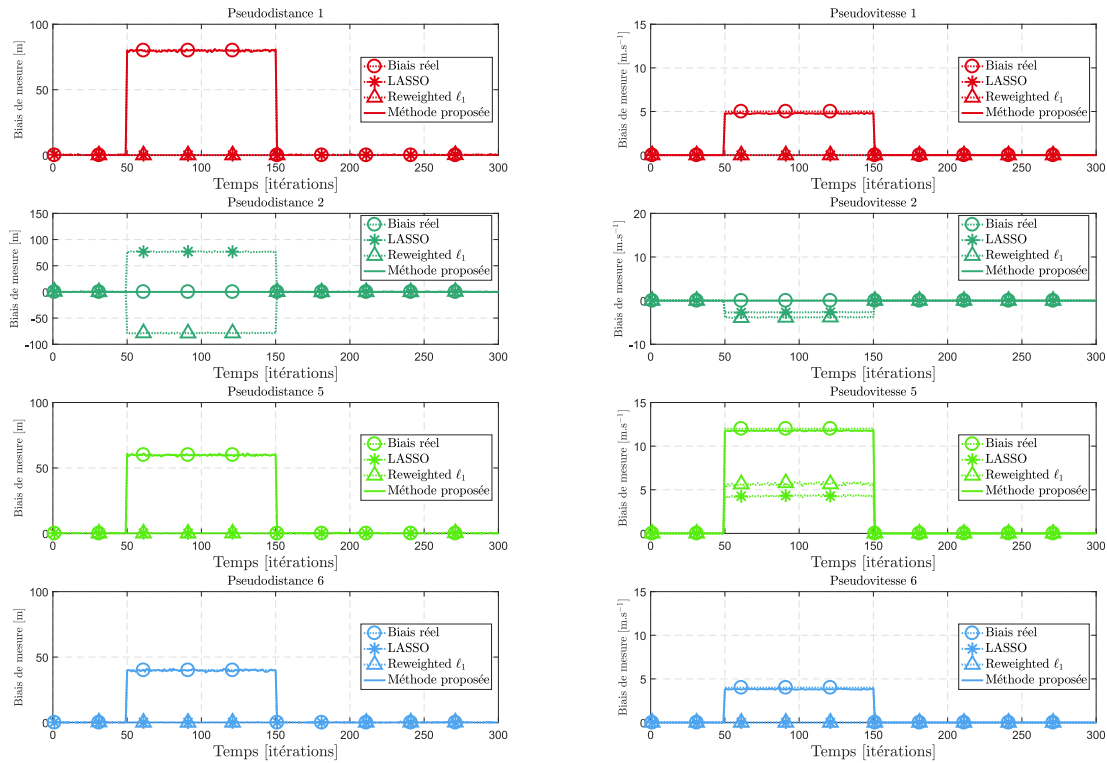


FIGURE 2.7 – Variations des RMSE pour chaque paramètre fixé par validation croisée. Les valeurs choisies sont représentées par une ligne noire verticale en tirets.

(45, 80, 20, 30, 1). Les résultats sont donnés dans la figure 2.7 et expriment l'erreur quadratique moyenne, ou *Root Mean Square Error* (RMSE) de la position projetée sur chacun des axes du repère ENU. La figure 2.8 montre alors les résultats pour chacune des méthodes d'estimation de biais sur les pseudodistances et pseudovitesse de 4 satellites (dont 3 sont effectivement sujets à des multitrajets). On remarque que l'algorithme résolvant le LASSO classique et l'algorithme ℓ_1 repondéré estiment parfois des biais à des instants où il ne devrait pas en avoir (e.g., satellite #2), et manquent des biais dans certains canaux contaminés (e.g., satellite #1). Nous pensons que ceci est dû au fait que ces méthodes sont performantes en grande dimension ($m \gg 10$) avec des vecteurs très parcimonieux ($\approx 10\%$ de composantes non-nulles), ce qui n'est pas notre cas (une dizaine de mesures, $\approx 40\%$ de composantes non-nulles). En revanche, la méthode proposée ne se trompe plus de canaux contaminés, et estime

5. Dans les codes disponibles sur internet, les positions de satellites sont générées aléatoirement car les données qui nous ont été fournies sont confidentielles

les biais plus précisément. On peut maintenant analyser si cette estimation de biais permet



(a) Biais moyen estimé sur les pseudodistances de 4 satellites. N.B., la méthode proposée est la seule en traits pleins, les autres méthodes sont en pontillés avec des marqueurs.

(b) Biais moyen estimé sur les pseudovitesse de 4 satellites. N.B., la méthode proposée est la seule en traits pleins, les autres méthodes sont en pontillés avec des marqueurs.

FIGURE 2.8 – Comparaison des différentes méthodes présentées pour l’estimation des biais de mesure dus aux multitrajets.

d’améliorer les résultats de la méthode décrite dans la section 1.7. Pour cela nous comparons les 3 stratégies étudiées précédemment avec la solution sans détection/correction des multitrajets (donc telle que décrite à la fin de la section 1.7). Les RMSE sur chaque axe du repère ENU sont représentées dans la figure 2.9. Cette dernière montre donc l’intérêt de l’estimation des ces différents biais avec des estimations de biais très précises. Pour conclure, ces simulations permettent d’apprécier l’intérêt de la méthode proposée en environnement contrôlé, i.e., lorsque l’état et les mesures suivent les modèles proposés (2.29) et (2.31). La prochaine section a pour but d’étudier les performances de la méthode lorsque le modèle d’état n’est pas conforme à (2.29).

2.4.2 Données réalistes

Afin de s’affranchir de la connaissance du modèle d’état (2.29), nous allons utiliser une trajectoire de référence obtenue à partir de données réelles mesurées par un récepteur haute précision (Novatel SPAN, composée d’un récepteur GPS Propak V3 couplé à une centrale inertielle IMAR), que nous avons représentée dans la figure 2.10. Les mesures sont toujours générées d’après (2.31), et le biais a été ajouté entre les instants $k = 200$ et 300 (avec les mêmes amplitudes que dans les simulations précédentes). La figure 2.11 montre l’erreur de positionnement obtenue pour ce scénario. On peut remarquer que les performances sont semblables à celles obtenues précédemment, ce qui montre que la méthode proposée est robuste

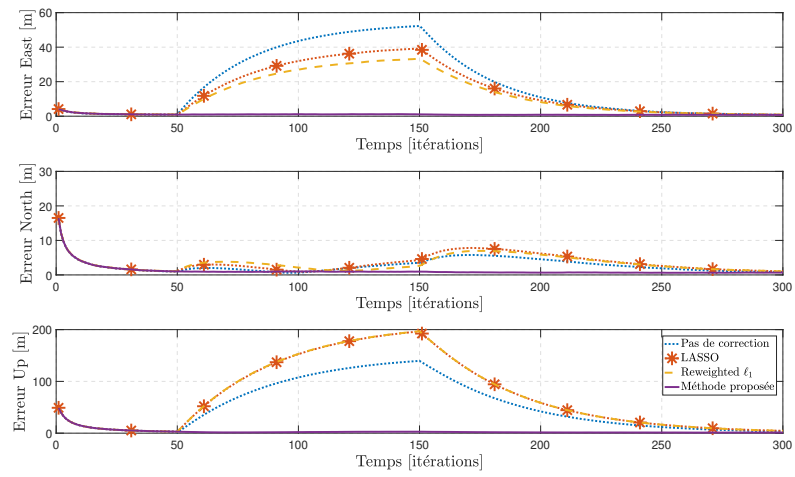


FIGURE 2.9 – Comparaisons des RMSE pour différents filtrages de l'état.

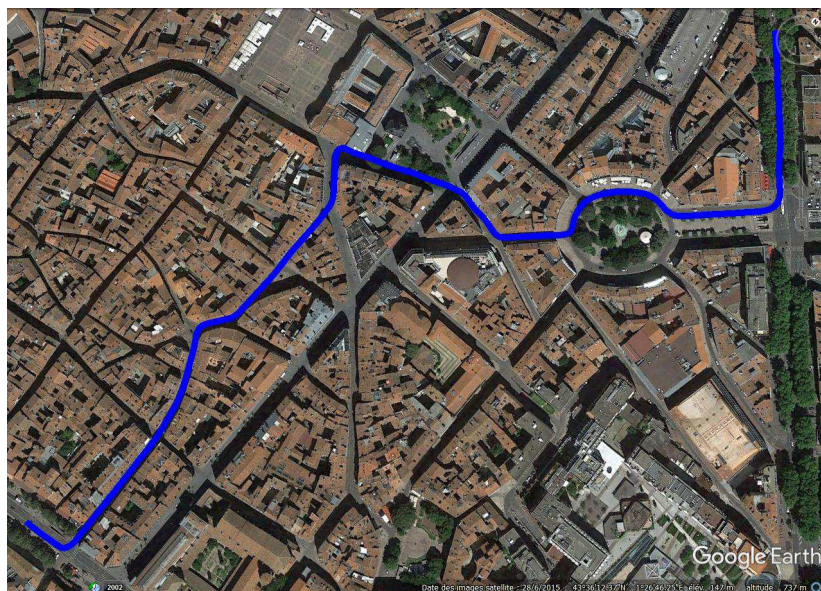


FIGURE 2.10 – Trajectoire utilisée pour générer les données réalistes.

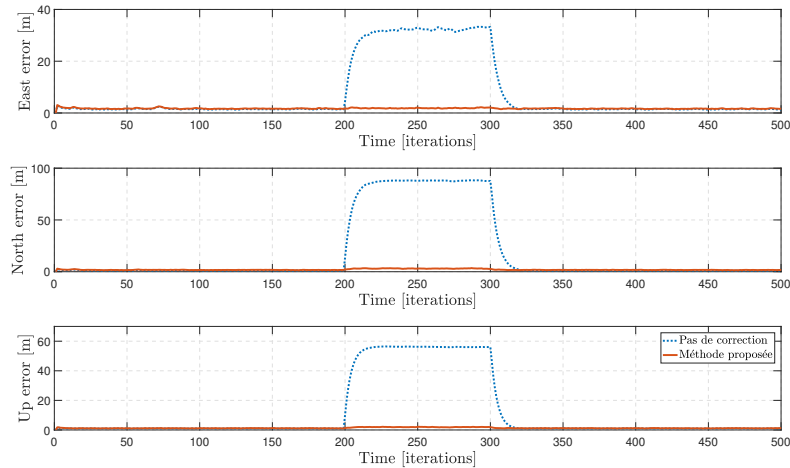


FIGURE 2.11 – Comparaison entre méthode de référence (sans correction des multitrajets, en pointillés) et méthode proposée (correction par LASSO pondéré, en traits pleins) en terme d’erreur de positionnement au cours du temps.

à la non-connaissance de l’équation d’état (2.29). Les résultats de la figure 2.12 montrent l’évolution de la performance de la méthode en fonction du nombre de satellites souffrant de multitrajets. Les résultats obtenus par la méthode proposée sont satisfaisants lorsqu’il y a moins de 5 satellites sur 8 affectés. On peut le voir plus facilement sur la figure 2.13 qui est un zoom de la précédente. A l’inverse, les performances de l’algorithme se dégradent fortement lorsque le nombre de mesures biaisées est supérieur à 6 sur 8 satellites, ce qui donne une limite de l’hypothèse de parcimonie pour ce scénario.

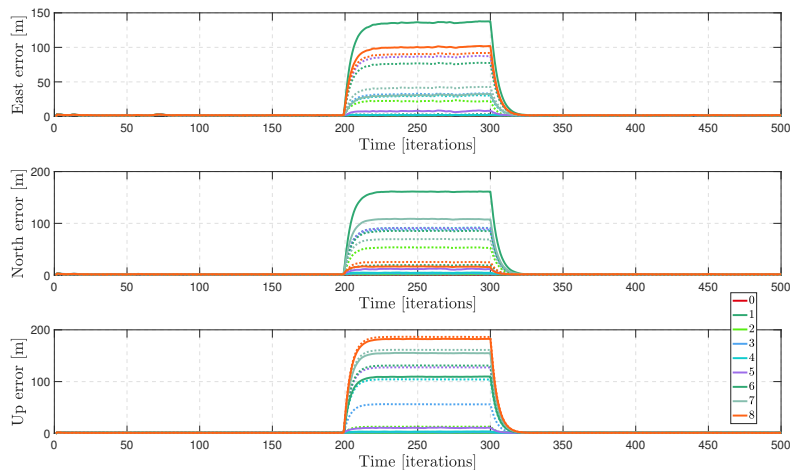


FIGURE 2.12 – Comparaison entre méthode de référence (sans correction des multitrajets, en pointillés) et méthode proposée (correction par LASSO pondéré, en traits pleins) en fonction du nombre de satellites affectés par des multitrajets.

2.4.3 Données réelles

Finalement la méthode proposée a été testée sur des données réelles obtenues à l’aide de mesures fournies par un récepteur Ublox AEK-4T, alors que la réalité terrain est fournie par la même station SPAN Novatel (GPS + centrale inertielle) que précédemment. Nous allons tester notre méthode sur la campagne de mesure entière, mais aussi sur des scénarios choisis,

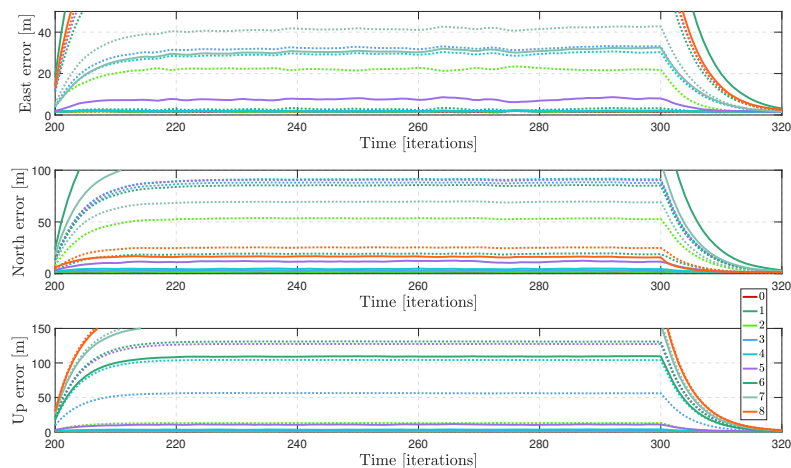


FIGURE 2.13 – Comparaison entre méthode de référence (sans correction des multitrajets, en pointillés) et méthode proposée (correction par LASSO pondéré, en traits pleins) en fonction du nombre de satellites affectés par des multitrajets (zoom).

où le ciel est dégagé afin de n’avoir pas ou peu de multitrajet, et un autre correspondant à un environnement urbain dense où les multitrajets sont nombreux. Le récepteur Ublox est indépendant et fonctionne seul, i.e., la position qu’il fournit dépend seulement des signaux satellites qu’il capte. Ses algorithmes de poursuite, i.e., corrélateurs et discriminateurs utilisés, cf. 1.2.1.3, sont inconnus du grand public, mais le récepteur fournit, en plus de la position qu’il calcule, ses mesures de pseudodistance, de pseudovitesse et de C/N_0 . Les performances sont évaluées à l’aide des RMSE de la position dans le plan horizontal (axes E,N du repère ENU) et d’altitude (axe U, en valeur absolue). Nous donnons aussi les fonctions de répartition, ou *Cumulative Distribution Function* (CDF) empiriques de ces erreurs de positionnement dans le plan et d’altitude. Nous présentons finalement quelques chiffres clés de ces distributions pour les différents scénarios dans la table 2.2. La trajectoire considérée est représentée dans la figure 2.14 ainsi que l’évolution du skyplot et du nombre des satellites perçus par le récepteur au cours du temps. On peut remarquer que la trajectoire comporte des zones où le nombre

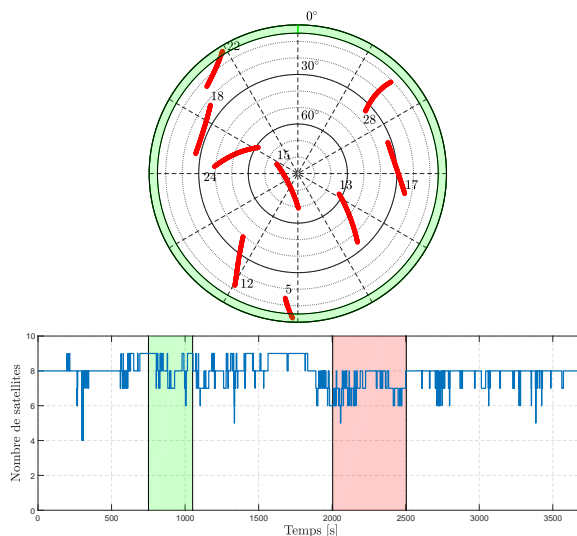
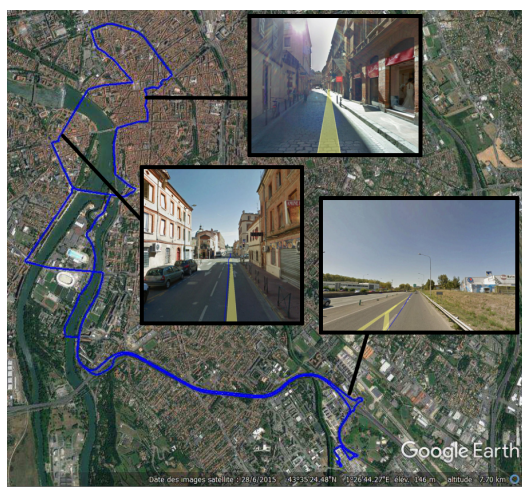


FIGURE 2.14 – Trajectoire de la campagne de mesure complète (gauche), skyplot (en haut à droite) et nombre de satellites au cours du temps (en bas à droite) pour la campagne entière. La surface verte dans le skyplot représente les élévations inférieures à 5° , la zone verte dans l’évolution du nombre de satellites représente le scénario “ciel ouvert” et la zone rouge le scénario “environnement urbain”.

de satellites est quasiment constant (8 à 9), et d'autres où ce nombre varie fortement. On remarque aussi que seuls deux satellites (#5 et #22) peuvent avoir une élévation inférieure à 5° , ce qui correspond à la surface verte du skyplot dans la figure 2.14.

2.4.3.1 Justification de l'algorithme utilisé

Nous allons dans un premier comparer ici plusieurs réglages de la méthode afin de justifier son choix. Tout d'abord, nous allons souligner l'intérêt de l'ajout de la pondération sur l'élévation. Pour cela, nous avons comparé la méthode proposée avec la même méthode à laquelle on a ajouté un masque d'élévation à 5° , i.e., on a enlevé du calcul les satellites ayant une élévation inférieure à 5° , ce qui correspond à supprimer les poids liés à l'élévation (car les poids valent 1 pour les élévations supérieures à cette valeur). Les CDF d'erreurs correspondantes sont représentées dans la figure 2.15, et montrent qu'il vaut mieux pondérer les mauvais satellites que les écarter du calcul (si on utilise notre méthode parcimonieuse). Ensuite, nous

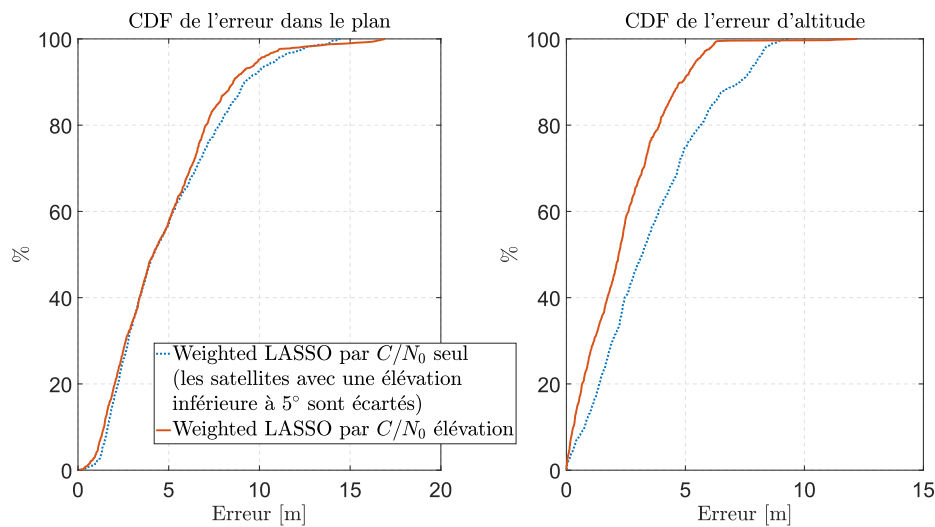


FIGURE 2.15 – Comparaison entre méthode de référence (sans correction des multitrajets, en pointillés) et méthode proposée (correction par LASSO pondéré, en traits pleins) en fonction du nombre de satellites affectés par des multitrajets (zoom).

avons comparé plusieurs valeurs d'élévation maximale à pondérer θ_0 , cf., (2.36). Les CDF correspondantes sont données dans la figure 2.16. On remarque que $\theta_0 = 90^\circ$ semble être la meilleure valeur, mais la pondération utilisant la valeur de C/N_0 seule est bien meilleure. Nous étudions maintenant ce que donne la pondération utilisant l'élévation pour plusieurs angles θ_0 et une pondération liée au C/N_0 . Les CDF correspondantes sont tracées dans la figure 2.17. Cette fois, la valeur $\theta_0 = 90^\circ$ semble être la moins bonne. Nous avons choisi une faible valeur du seuil utilisé pour les élévations ($\theta_0 = 5^\circ$) pour la suite.

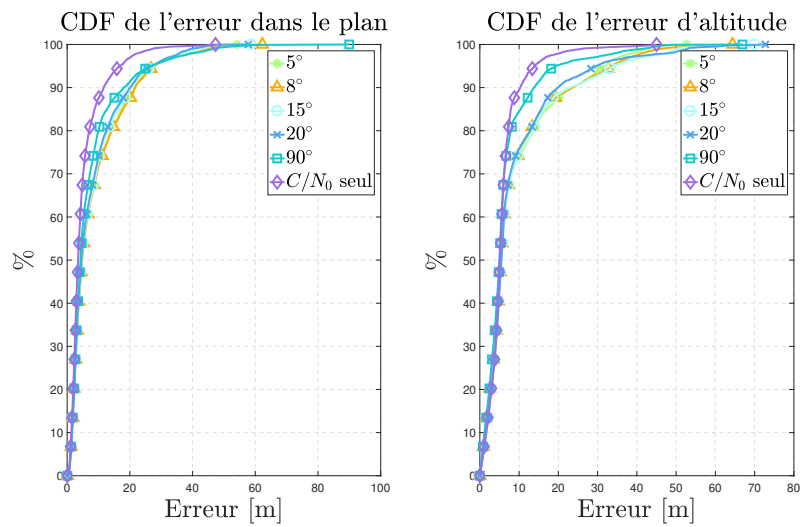


FIGURE 2.16 – Comparaison de différentes valeurs de θ_0 pour une pondération par l'élévation seule et pondération par C/N_0 seule.

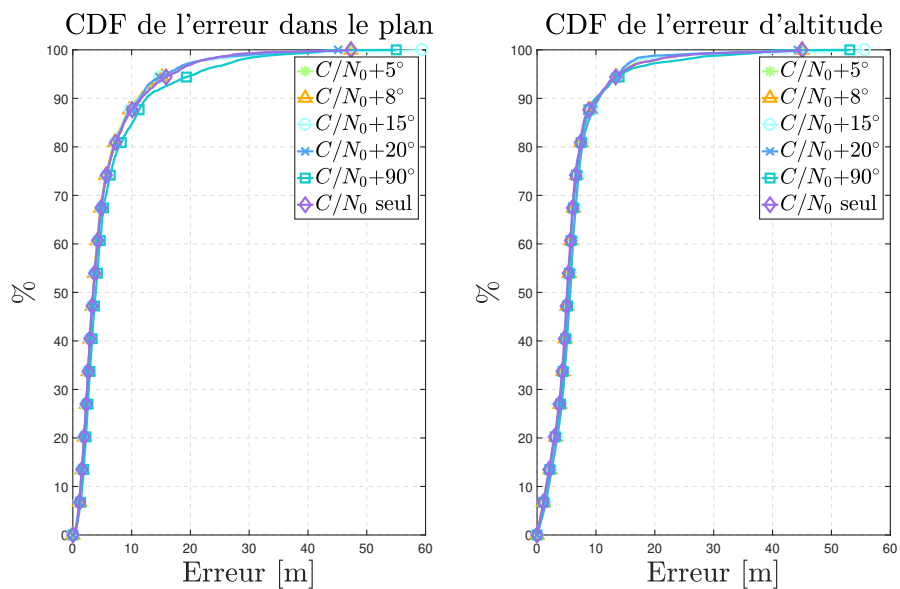


FIGURE 2.17 – Comparaison de différentes valeurs de θ_0 pour une pondération par l'élévation et par C/N_0 .

2.4.3.2 Campagne de mesure entière

Les erreurs planaires et d'altitude sont représentées dans la figure 2.18 et les CDF correspondantes dans la figure 2.19. La méthode proposée surpasse la méthode de référence (qui ne cherche pas à combattre les multitrajets), aussi bien en terme d'erreur planaire que d'erreur d'altitude, et semble donner des performances équivalentes à celles du récepteur Ublox sur la totalité de la campagne. La table 2.2 confirme la performance de la méthode parcimonieuse proposée.

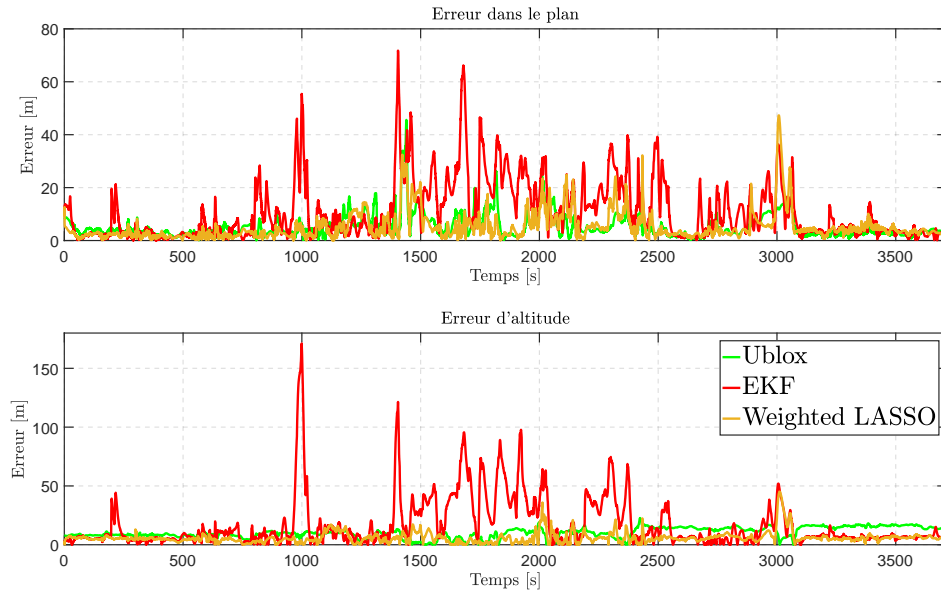


FIGURE 2.18 – Evolution temporelle de l'erreur de position pour la solution du récepteur (Ublox), de la méthode de référence (EKF), et de la méthode proposée (Weighted LASSO).

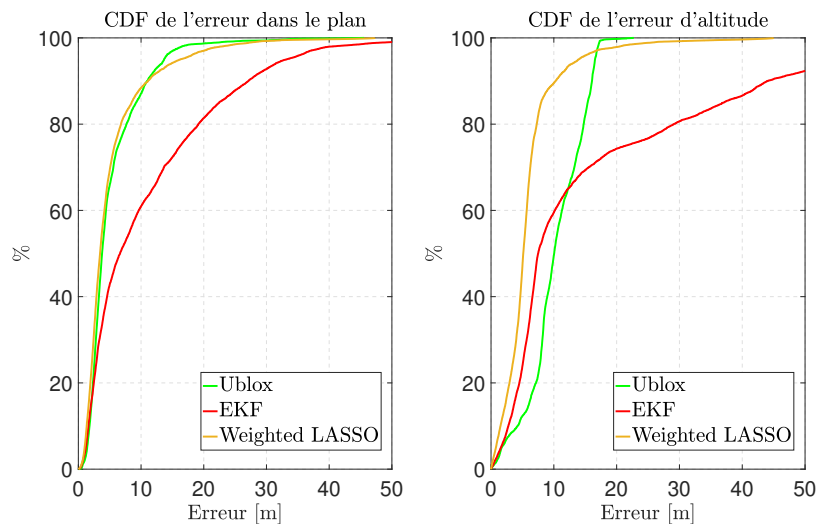


FIGURE 2.19 – CDFs de l'erreur de position pour la solution donnée par le récepteur (Ublox), la méthode de référence (EKF), et la méthode proposée (Weighted LASSO).

2.4.3.3 Ciel ouvert

La trajectoire à l'environnement ciel ouvert est représentée dans la figure 2.20 et l'évolution du skyplot et du nombre des satellites perçus par le récepteur au cours du temps sont représentés dans la figure 2.21. Les erreurs planaires et d'altitude sont tracées dans la figure 2.22 et les CDF correspondantes dans la figure 2.23. Ces résultats montrent que la

méthode proposée améliore considérablement la méthode de référence et approche les performances de la solution boîte noire du récepteur.

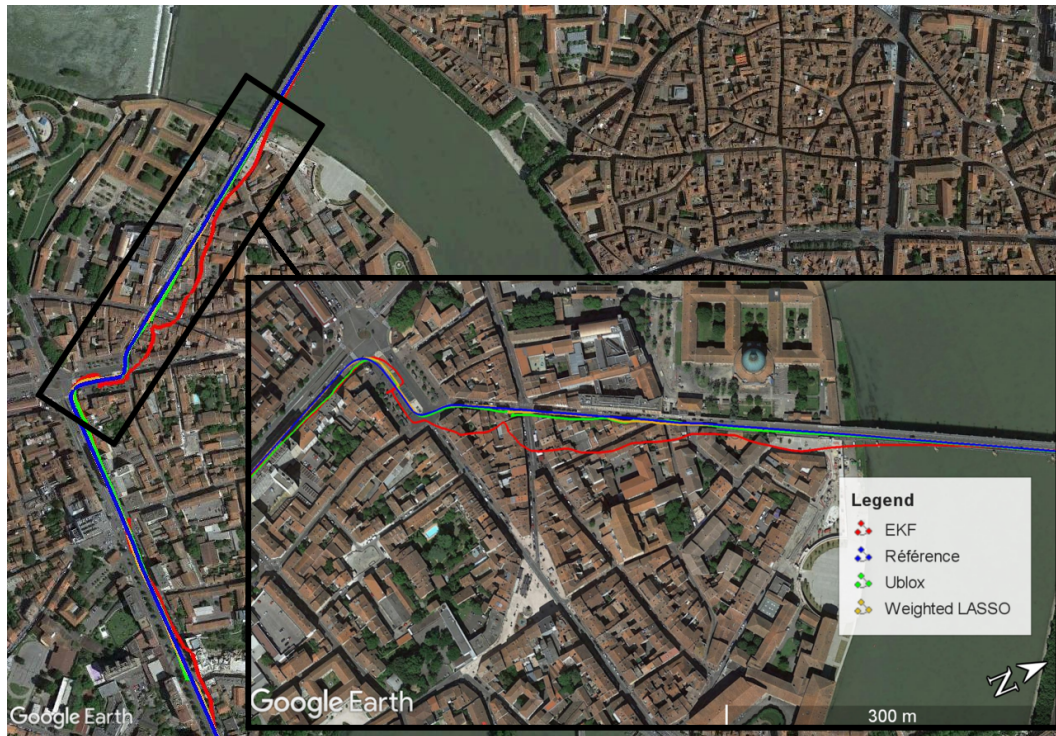


FIGURE 2.20 – Trajectoire du scénario “ciel dégagé”.

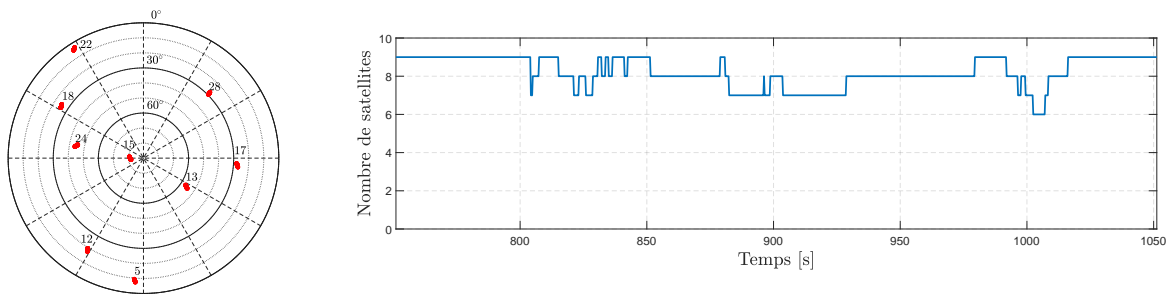


FIGURE 2.21 – Skyplot (à gauche) et nombre de satellites au cours du temps (à droite) pour le scénario “ciel dégagé”.

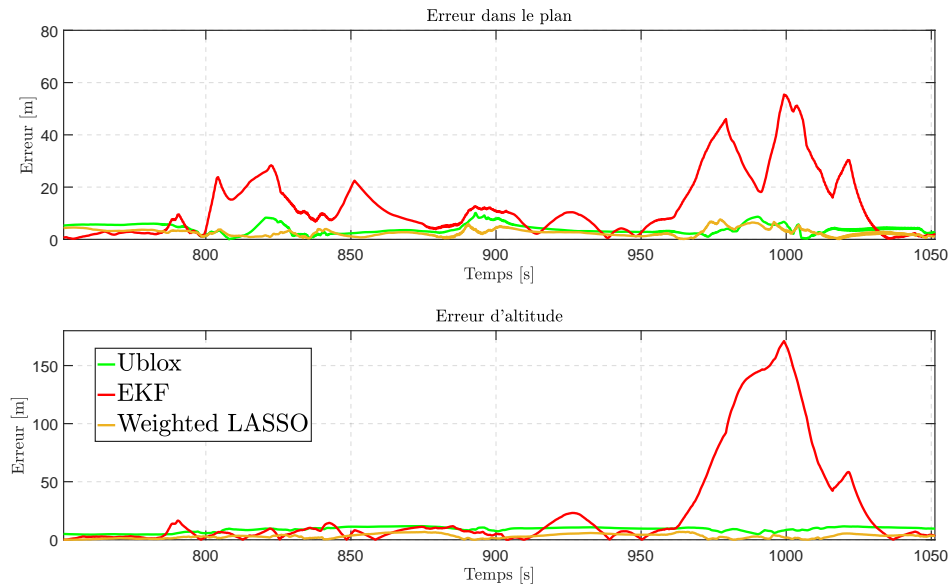


FIGURE 2.22 – Evolution temporelle de l’erreur de position pour la solution du récepteur (Ublox), de la méthode de référence (EKF), et de la méthode proposée (Weighted LASSO) pour le scénario “ciel dégagé”.

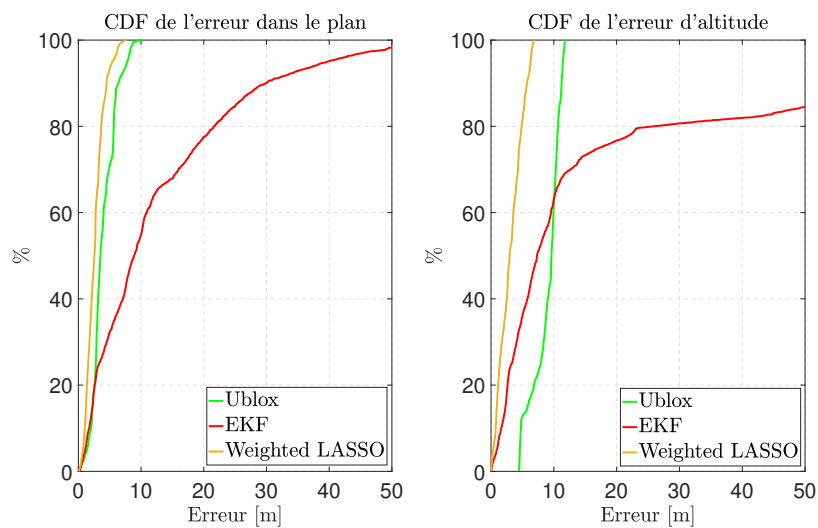


FIGURE 2.23 – CDFs de l’erreur de position pour la solution donnée par le récepteur (Ublox), la méthode de référence (EKF), et la méthode proposée (Weighted LASSO) pour le scénario “ciel dégagé”.

2.4.3.4 Environnement urbain

La trajectoire correspondant au scénario “ciel ouvert” est représentée dans la figure 2.24 et l'évolution du skyplot et du nombre des satellites perçus par le récepteur au cours du temps sont représentés dans la figure 2.25. Les erreurs planaires et d'altitude sont montrées dans la figure 2.26 et les CDF correspondantes dans la figure 2.27. Dans ce scénario, la méthode proposée est toujours plus performante que la méthode de référence, et a des performances toujours équivalentes à celle de la position fournie par le récepteur. En revanche on peut remarquer que la solution proposée est sensiblement moins bonne que la solution Ublox à certains instants, car dans certaines configurations l'hypothèse de parcimonie des biais n'est plus vérifiée.

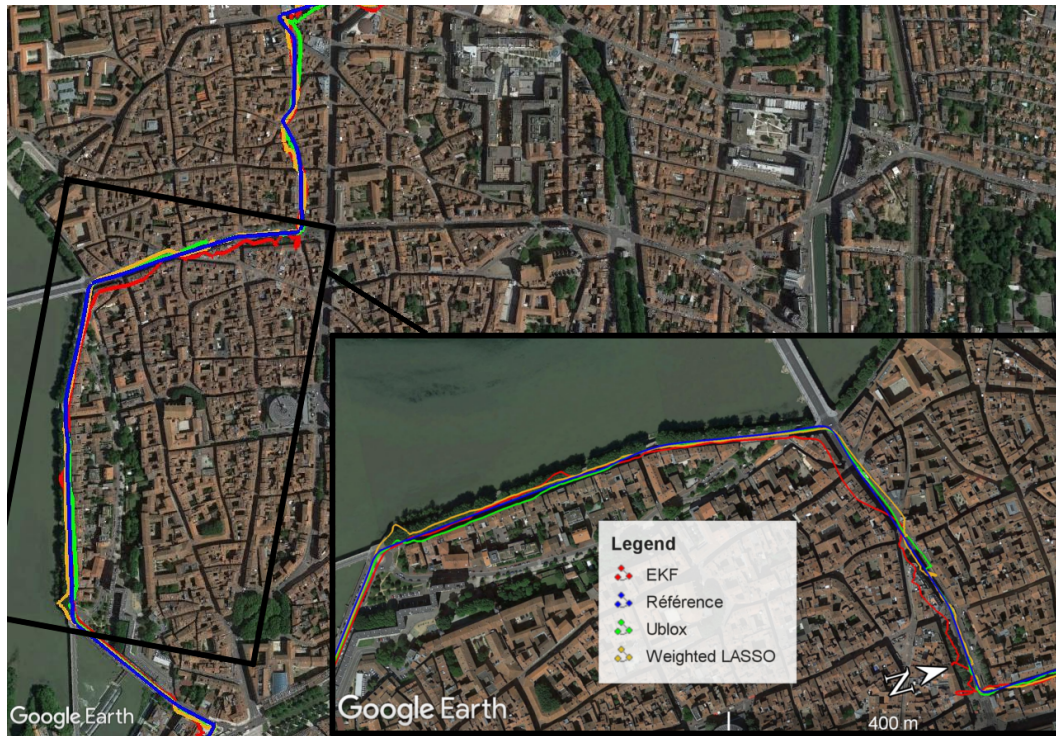


FIGURE 2.24 – Trajectoire du scénario “environnement urbain”.

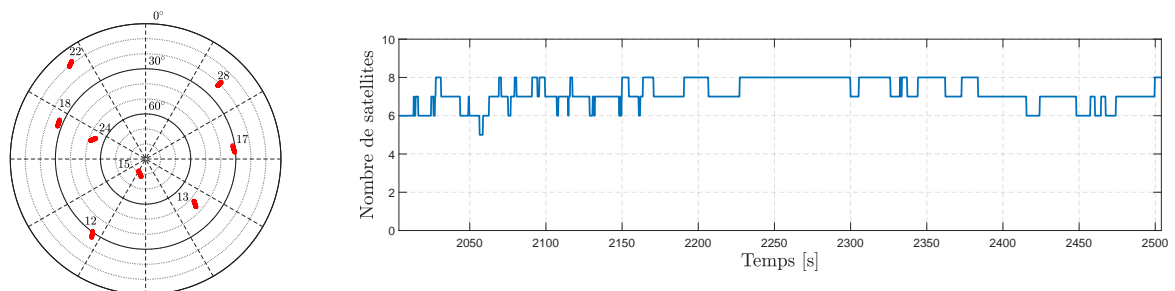


FIGURE 2.25 – Skyplot (à gauche) et nombre de satellites au cours du temps (à droite) pour le scénario “environnement urbain”.

2.4.3.5 Conclusion

Cette section montrée l'intérêt d'une estimation parcimonieuse des biais multitrajets à l'aide d'un algorithme utilisant une pénalisation ℓ_1 pondérée. Que ce soit sur des données synthétiques ou réelles, la méthode proposée montre des résultats plus performants que des méthodes classiques, et parfois même que la solution du récepteur Ublox dont sont issues

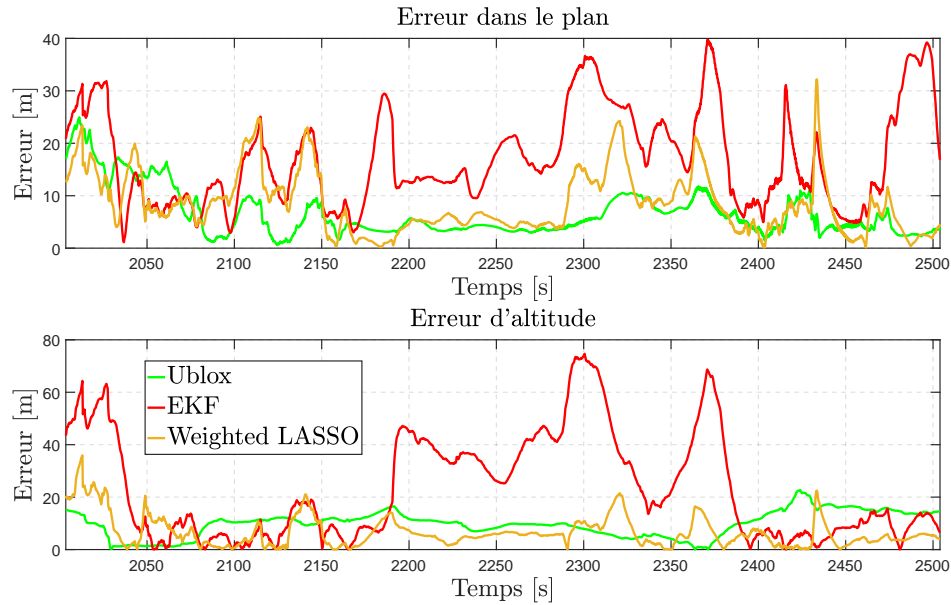


FIGURE 2.26 – Evolution temporelle de l'erreur de position pour la solution du récepteur (Ublox), de la méthode de référence (EKF), et de la méthode proposée (Weighted LASSO) pour le scénario “environnement urbain”.

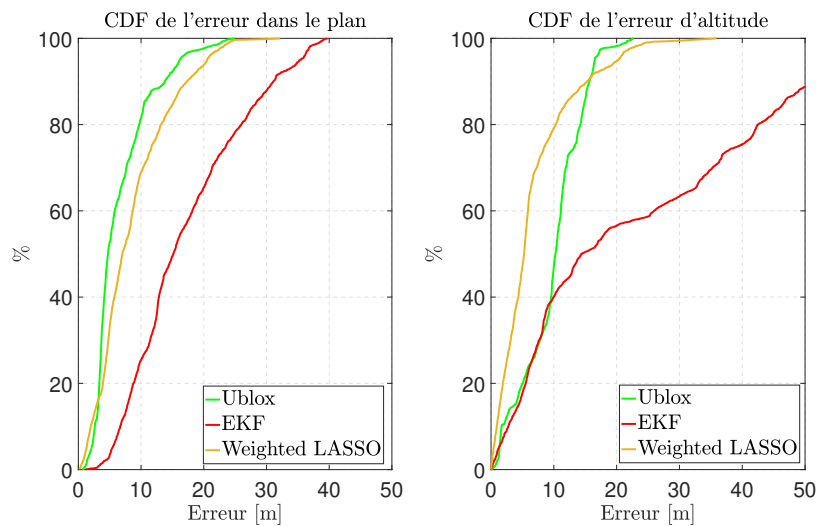


FIGURE 2.27 – CDFs de l'erreur de position pour la solution donnée par le récepteur (Ublox), la méthode de référence (EKF), et la méthode proposée (Weighted LASSO) pour le scénario “environnement urbain”.

| | Erreurs horizontales (m) | | | | Erreurs d'altitude (m) | | | |
|------------------|--------------------------|------|-------|-------|------------------------|-------|-------|-------|
| | Min | Med | 95% | Max | Min | Med | 95% | Max |
| (a) | | | | | | | | |
| Ublox AEK 4-T | 0.03 | 3.78 | 13.67 | 45.58 | 2.10^{-3} | 10.05 | 16.55 | 22.73 |
| Méthode proposée | 0.03 | 3.43 | 16.25 | 47.22 | 6.10^{-4} | 5.52 | 13.95 | 44.72 |
| (b) | | | | | | | | |
| Ublox AEK 4-T | 0.03 | 3.52 | 7.79 | 10.13 | 4.44 | 9.62 | 11.44 | 11.73 |
| Méthode proposée | 0.07 | 2.55 | 5.43 | 7.66 | 3.10^{-3} | 2.96 | 6.29 | 6.80 |
| (c) | | | | | | | | |
| Ublox AEK 4-T | 0.59 | 4.73 | 16.17 | 24.96 | 0.01 | 10.25 | 16.51 | 22.73 |
| Méthode proposée | 0.04 | 7.02 | 20.55 | 32.2 | 9.10^{-4} | 5.26 | 20.26 | 35.92 |

TABLEAU 2.2 – Chiffres clés de l'erreur de positionnement dans le plan horizontal et en altitude. (a) campagne de mesure entière, (b) ciel ouvert and (c) environnement urbain.

les mesures utilisées. Nous avons également testé les limites de la méthode en contrôlant le nombre de biais non nuls jusqu'à mettre en défaut l'hypothèse de parcimonie.

2.4.4 Variantes de l'algorithme

2.4.4.1 Intérêt de l'ajout d'un terme de lissage

Nous proposons ici de vérifier l'intérêt de la présence du terme de lissage introduit dans la partie 2.3.4.1. Pour cela nous comparons les CDF des deux méthodes (avec et sans lissage), qui sont représentées dans la figure 2.28. On remarque que les deux méthodes semblent équivalentes, et permettent d'améliorer les résultats obtenus avec un filtre de Kalman étendu (Standard EKF). Pour se convaincre de l'intérêt de l'ajout de ce terme de lissage, nous portons notre attention sur la zone où le problème présenté dans la figure 2.6 s'est produit. Ce passage est représenté dans la figure 2.29, où la discontinuité est repérée par le cercle vert. On peut observer que la solution sans lissage s'écarte fortement de la référence, alors que le lissage permet d'obtenir une solution proche de cette référence, d'où l'intérêt de ce terme de lissage.

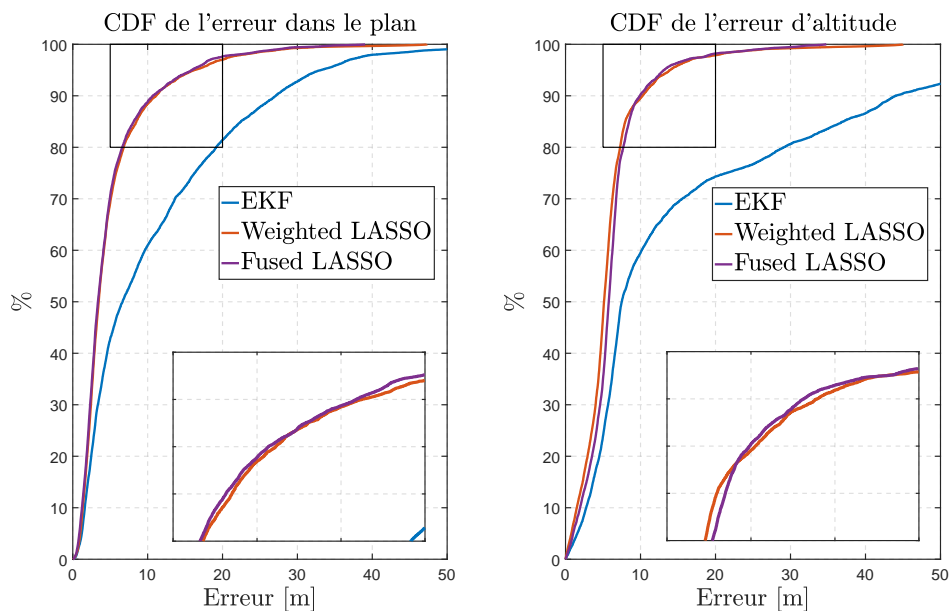


FIGURE 2.28 – CDF des erreurs dans le plan (à droite) et d'altitude (à gauche) pour différentes méthodes.

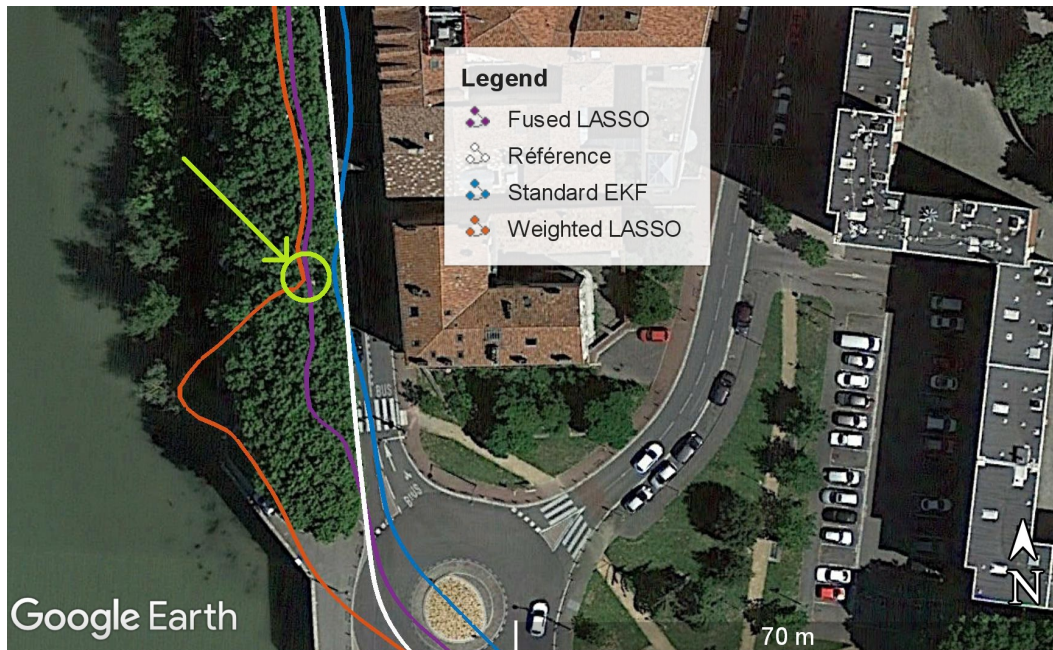


FIGURE 2.29 – Détails des trajectoires pour différentes méthodes.

2.4.4.2 Comparaison de toutes les méthodes

Nous avons comparé dans cette partie toutes les combinaisons des méthodes présentées jusqu'alors, à savoir

- la méthode de référence 1.7 (Standard EKF)
- la méthode parcimonieuse ℓ_1 pondérée 2.3.1 (Weighted LASSO)
- la méthode parcimonieuse ℓ_1 pondérée avec lissage temporel 2.3.4.1 (Fused LASSO)
- la méthode Danish seule 2.3.4.2 (Danish)
- la méthode parcimonieuse ℓ_1 pondérée couplée avec la méthode Danish (Weighted LASSO + Danish)
- la méthode parcimonieuse ℓ_1 pondérée avec lissage temporel couplée avec la méthode Danish (Fused LASSO + Danish)
- la solution constructeur (Ublox)

Comme dans la partie précédente, nous avons considéré la campagne entière, et les deux mêmes scénarios “ciel dégagé” et “environnement urbain”, et nous avons comparé chaque méthode à l’aide de l’évolution des erreurs temporelles dans le plan et d’altitude, et les CDF correspondantes. Pour la campagne entière, les erreurs au cours du temps sont données dans la figure 2.30, alors que les CDF sont données dans la figure 2.31. D’autre part, la table 2.3 donne des valeurs particulières des différents centiles d’erreur de chacune des méthodes.

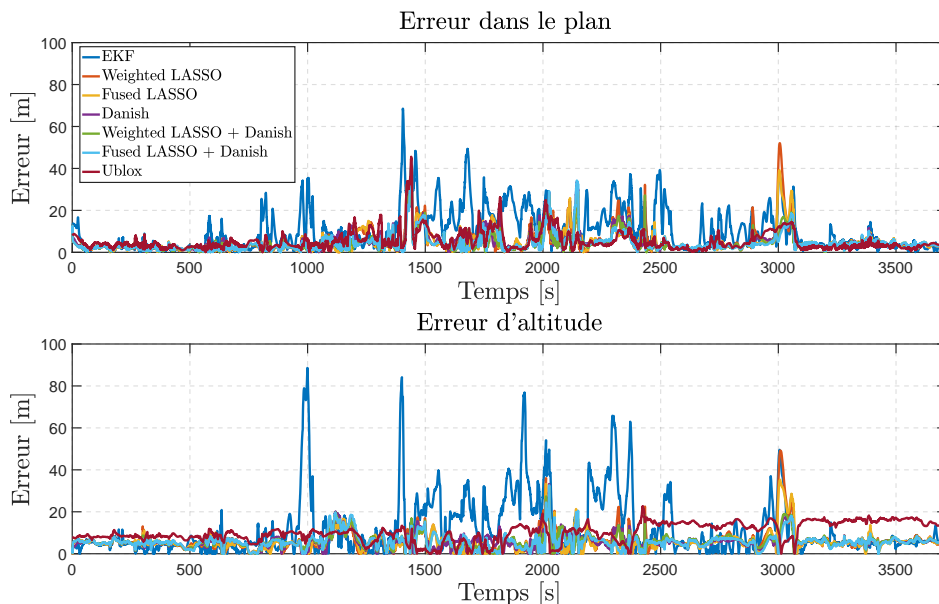


FIGURE 2.30 – Evolution des erreurs estimées dans le plan (en haut) et d’altitude (en bas) au cours du temps pour chacune des méthodes.

Pour le scénario “ciel dégagé”, les erreurs au cours du temps sont représentées dans la figure 2.32, alors que les CDF sont tracées dans la figure 2.33. On remarque que toutes les méthodes proposées sont plus performantes que la méthode de référence, ceci étant dû au fait que cette dernière suppose les erreurs centrées et gaussiennes, ce qui n’est pas le cas lors de la présence de multitrajets. Les méthodes proposées ont l’air d’avoir des CDF équivalentes, avec un avantage pour la méthode Fused LASSO + Danish qui fournit la plus petite erreur maximale dans le plan.

Pour le scénario “environnement urbain”, les erreurs au cours du temps sont représentées dans la figure 2.34, alors que les CDF sont tracées dans la figure 2.35. La solution fournie par le constructeur (Ublox) permet d’obtenir la meilleure CDF d’erreur dans le plan. Comme mentionné tout à l’heure, dans ce type d’environnement, l’hypothèse de parcimonie n’est

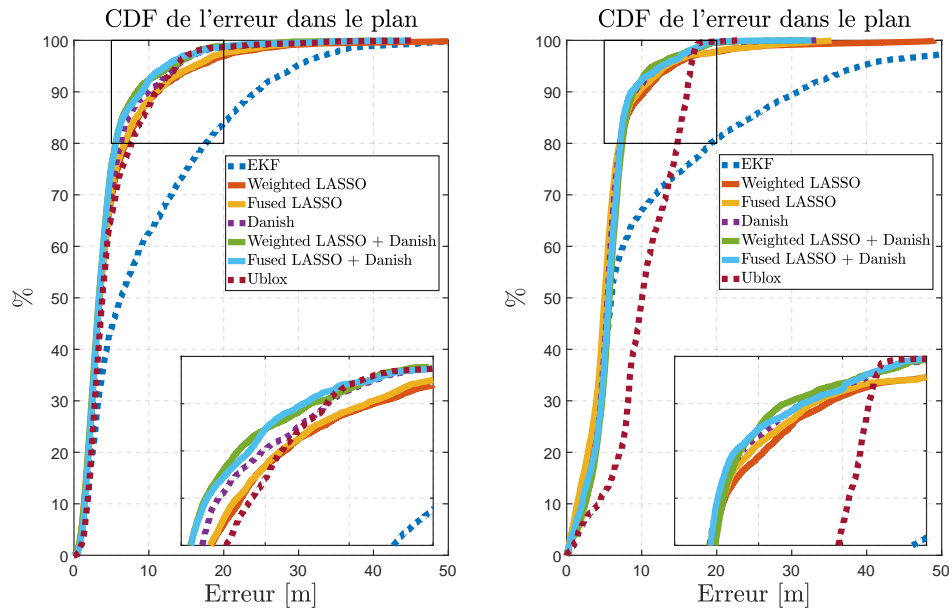


FIGURE 2.31 – CDF estimées des erreurs dans le plan (à gauche) et d'altitude (à droite) pour chacune des méthodes. Les tracés en pointillés correspondent aux méthodes qui existent déjà.

| Plan | 50% | 67% | 75% | 95% | 99% | Max |
|-------------------------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|
| EKF | 6.25 | 11.72 | 15.10 | 29.75 | 41.19 | 68.487 |
| Weighted LASSO | 3.46 | 4.74 | 5.79 | 16.45 | 28.27 | 52.059 |
| Fused LASSO | 3.439 | 4.69 | 5.63 | 16.06 | 26.66 | 39.21 |
| Danish | 3.59 | 4.68 | 5.539 | 13.75 | 23.48 | 42.29 |
| Weighted LASSO + Danish | 3.31 | 4.32 | 4.91 | 12.71 | 21.86 | 42.58 |
| Fused LASSO + Danish | 3.34 | 4.33 | 9 4.97 | 12.27 | 21.20 | 44.46 |
| Ublox | 3.78 | 5.17 | 6.36 | 13.67 | 22.68 | 45.58 |
| Altitude | 50% | 67% | 75% | 95% | 99% | Max |
| EKF | 5.96 | 10 | 15.54 | 39.34 | 73.47 | 88.61 |
| Weighted LASSO | 5.13 | 6.06 | 6.66 | 14.04 | 26.93 | 49.11 |
| Fused LASSO | 5.03 | 5.89 | 6.45 | 13.17 | 26.36 | 35.32 |
| Danish | 5.46 | 6.19 | 6.71 | 12.51 | 18.05 | 33.27 |
| Weighted LASSO + Danish | 5.71 | 6.58 | 7.03 | 11.57 | 18.47 | 32.27 |
| Fused LASSO + Danish | 5.57 | 6.41 | 6.85 | 12.62 | 17.97 | 32.64 |
| Ublox | 10.05 | 12.65 | 14.08 | 16.55 | 17.24 | 22.73 |

TABLEAU 2.3 – Centiles d'erreur choisis pour l'erreur dans le plan (en haut) et d'altitude (en bas) pour les différentes méthodes (en mètres).

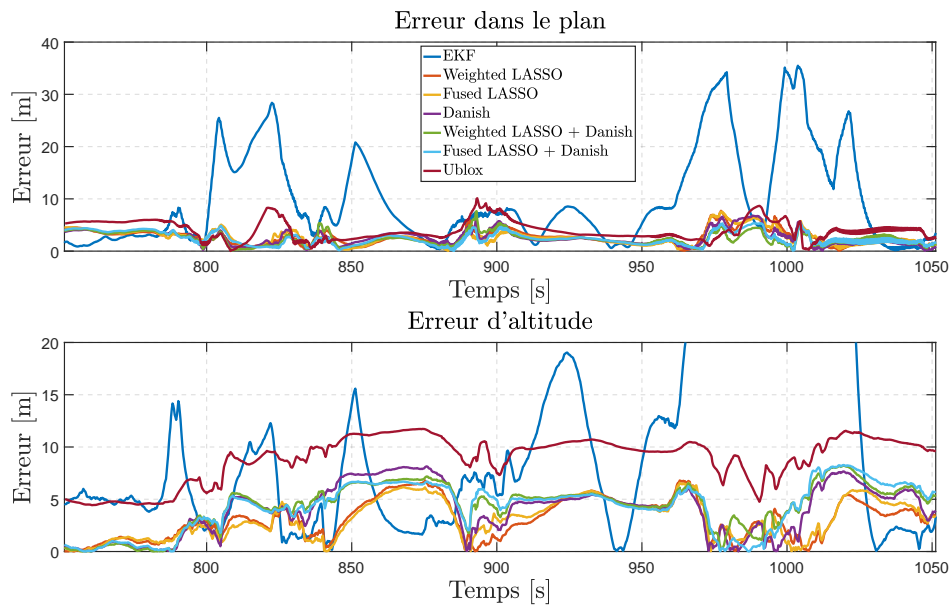


FIGURE 2.32 – Evolution des erreurs estimées dans le plan (en haut) et d'altitude (en bas) au cours du temps pour chacune des méthodes pour le scénario “ciel dégagé”.

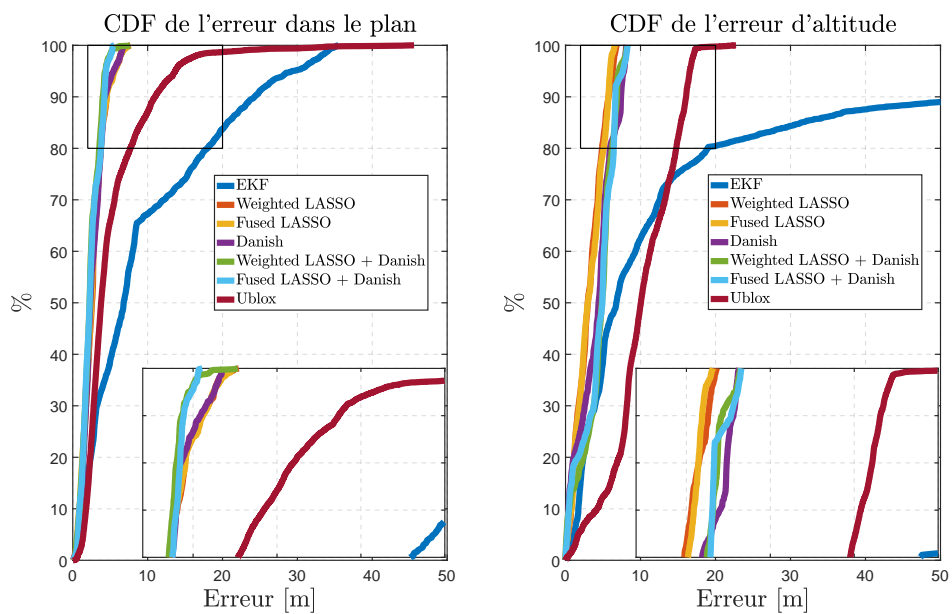


FIGURE 2.33 – CDF estimées des erreurs dans le plan (à gauche) et d'altitude (à droite) pour chacune des méthodes pour le scénario “ciel dégagé”.

plus valable et les méthodes proposées ne sont donc pas optimales. Cependant, les méthodes présentées surpassent dans tous les cas la méthode de référence. Si on regarde attentivement, on peut constater d'autre part que la méthode Weighted LASSO + Danish donne de meilleurs résultats que la méthode Danish seule. En revanche la méthode Fused LASSO + Danish semble (un peu) moins performante que la méthode Weighted LASSO + Danish. Ceci semble dû au fait qu'en environnement urbain compliqué, les multitrajets peuvent avoir des discontinuités (bâtiment qui n'ont pas la même hauteur, croisement d'un autre véhicule, ...), et qu'un lissage temporel n'est pas forcément adapté à cet environnement.

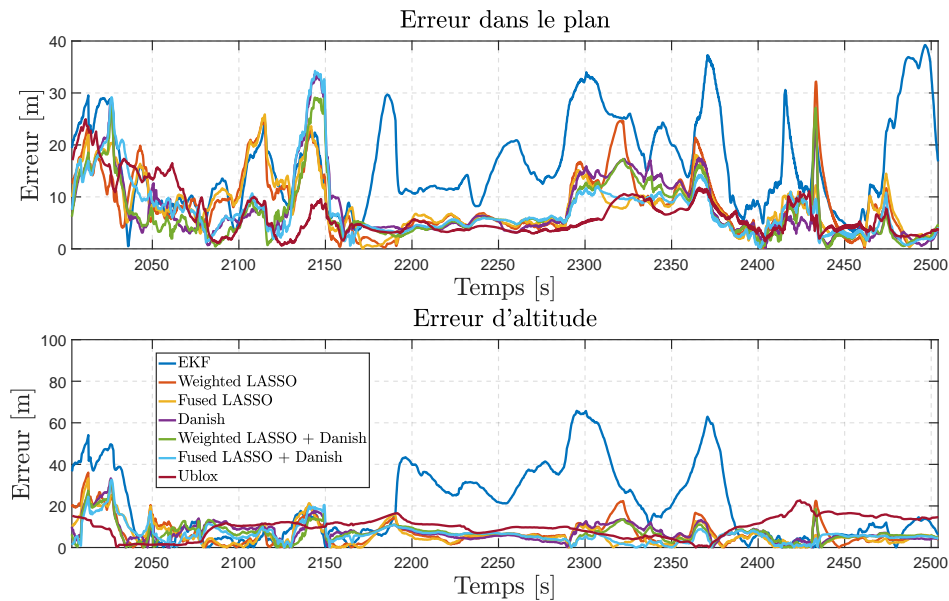


FIGURE 2.34 – Evolution des erreurs estimées dans le plan (en haut) et d'altitude (en bas) au cours du temps pour chacune des méthodes pour le scénario “environnement urbain”.

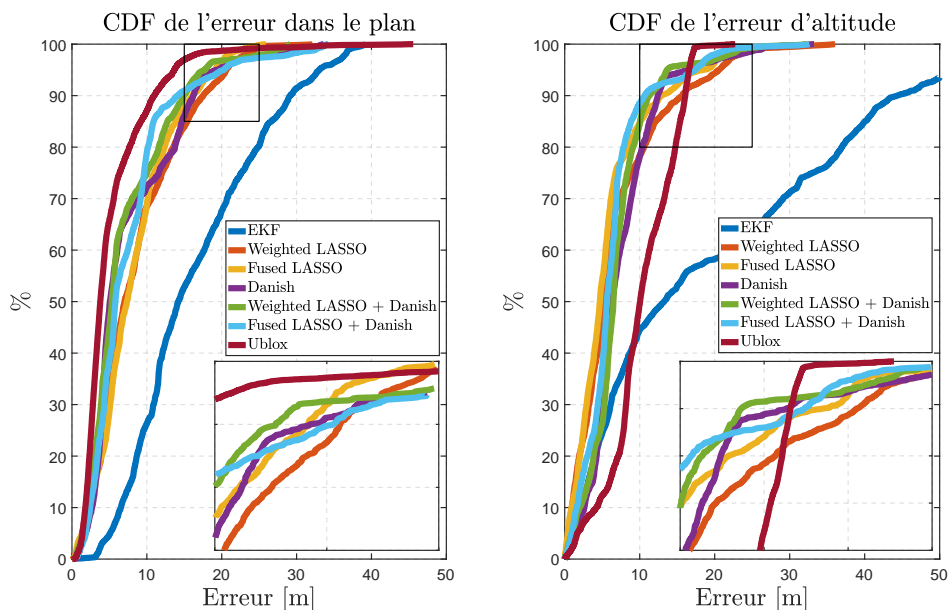


FIGURE 2.35 – CDF estimées des erreurs dans le plan (à gauche) et d'altitude (à droite) pour chacune des méthodes pour le scénario “environnement urbain”.

2.4.5 Coût calculatoire

Tout d'abord, nous pouvons comparer les temps de calculs de chacune des méthodes sur la totalité de la campagne de mesure. Ces temps de calculs pour chacune des méthodes sont rassemblés dans le tableau 2.4. Il est à noter que la campagne de mesure s'est déroulée sur une durée de 3714,2 secondes (1 heure 1 minute et 54.2 secondes). D'autre part, nous pouvons

| Méthode | Temps de calcul | Ecart relatif vs EKF | Rapport à la durée réelle |
|-------------------------|-----------------|----------------------|---------------------------|
| Standard EKF | 66.8 s | 0 % | 1.8 % |
| Weighted LASSO | 173.8 | 60.2 % | 4.7 % |
| Fused LASSO | 129.8 s | 94.3 % | 3.5 % |
| Danish | 77.0 s | 15.3 % | 2.1 % |
| Weighted LASSO + Danish | 173.7 s | 160 % | 4.7 % |
| Fused LASSO + Danish | 135.0 | 102.1 % | 3.6 % |

TABLEAU 2.4 – Temps de calcul des différentes méthodes.

aussi étudier le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence au cours du temps afin de juger de l'efficacité des algorithmes proposés en temps réel. La méthode Danish converge assez rapidement (une dizaine d'itérations) et n'est pas considérée dans cette partie. En revanche, les algorithmes de minimisation ℓ_1 nécessitent un nombre d'itérations variable pour converger vers la solution. Nous avons représenté ce nombre d'itérations pour chacune des deux méthodes sur la figure 2.36. On peut voir que certains pics dépassent 5000 itérations, ce qui risque de poser un problème pour une implantation temps réel. On peut alors se

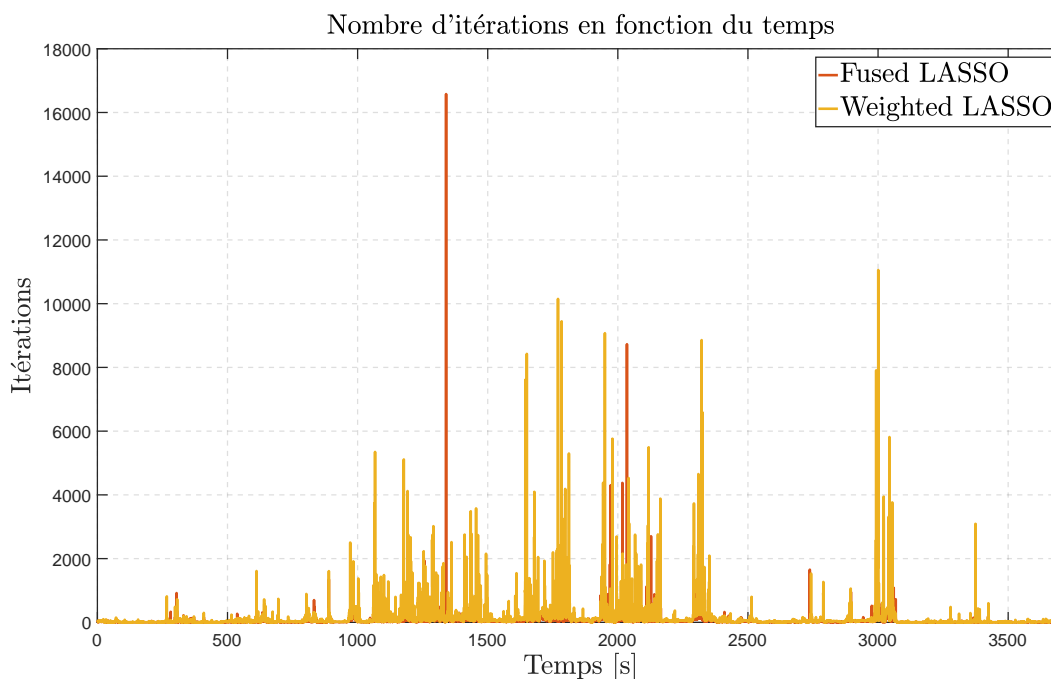


FIGURE 2.36 – Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence de chacun des algorithmes de minimisation ℓ_1 au cours du temps.

demander si limiter le nombre d'itérations, par exemple à 1000, va dégrader la qualité de l'estimation. Nous avons comparé ces deux méthodes avec un nombre d'itérations fixe (égal à 1000) dans la figure 2.37. On peut observer que limiter le nombre d'itérations ne dégrade pas significativement la qualité de la solution.

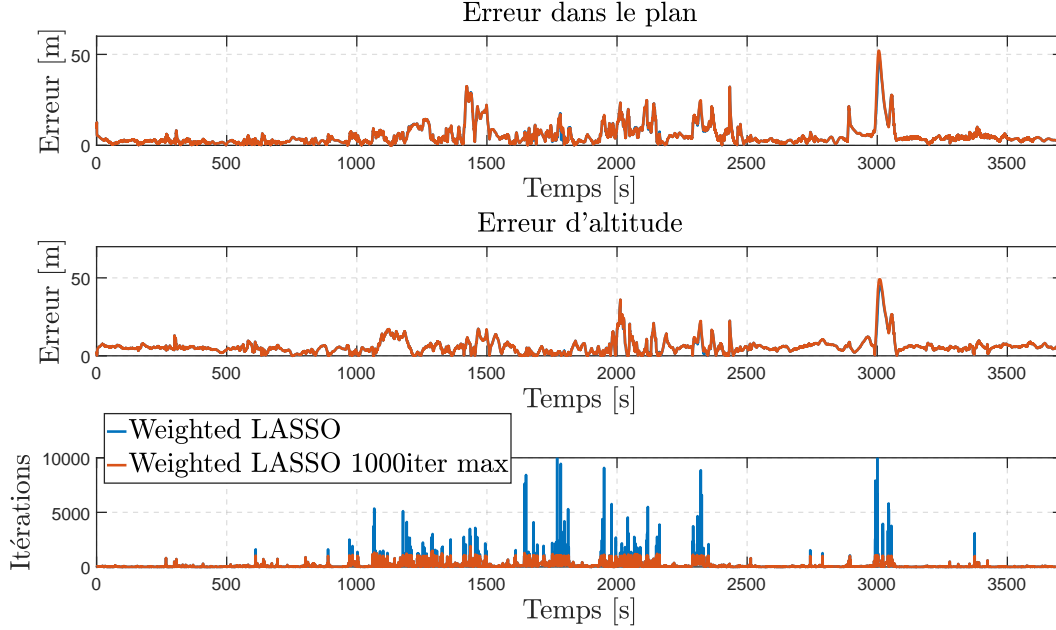


FIGURE 2.37 – Erreurs horizontale et verticale pour des nombres d'itérations fixe et variable.

2.5 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre deux méthodes d'estimation parcimonieuse des biais multitrajet en GNSS (appelées Weighted LASSO et Fused LASSO). Il est possible d'ajouter une estimation robuste de la matrice de covariance des mesures pour chacune de ces méthodes, ce qui permet d'obtenir 6 algorithmes de navigation qui sont résumés dans le tableau 2.5.

| Nom | Biais multitrajets | Covariance bruit | Entrées | Sorties |
|-------------------------------|-------------------------------|--|---|---|
| EKF (Méthode de référence) | $\mathbf{m}_k = \mathbf{0}$ | $\begin{bmatrix} \sigma_p^2 I_{s_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_r^2 I_{s_k} \end{bmatrix}$ | σ_p^2, σ_r^2 | $\hat{\xi}_{k k}$ |
| Weighted LASSO | \mathbf{m}_k vérifie (2.35) | $\begin{bmatrix} \sigma_p^2 I_{s_k} & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 I_{s_k} \end{bmatrix}$ | $\sigma_p^2, \sigma_r^2, \lambda_k, T, a, F, A, \theta_0$ | $\hat{\xi}_{k k}, \hat{\mathbf{m}}_k$ |
| Fused LASSO | \mathbf{m}_k vérifie (2.44) | $\begin{bmatrix} \sigma_p^2 I_{s_k} & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 I_{s_k} \end{bmatrix}$ | $\sigma_p^2, \sigma_r^2, \lambda_k, T, a, F, A, \theta_0, \mu_k$ | $\hat{\xi}_{k k}, \hat{\mathbf{m}}_k$ |
| Danish | $\mathbf{m}_k = \mathbf{0}$ | Danish 2.3.4.2 | $\alpha_0, (\sigma_{i,0}^2)_{i=1:2s_k}$ | $\hat{\xi}_{k k}, \hat{\mathbf{R}}_k$ |
| Weighted LASSO +Danish | \mathbf{m}_k vérifie (2.35) | Danish 2.3.4.2 | $\sigma_p^2, \sigma_r^2, \lambda_k, T, a, F, A, \theta_0, \alpha_0, (\sigma_{i,0}^2)_{i=1:2s_k}$ | $\hat{\xi}_{k k}, \hat{\mathbf{m}}_k, \hat{\mathbf{R}}_k$ |
| Fused LASSO +Danish | \mathbf{m}_k vérifie (2.44) | Danish 2.3.4.2 | $\sigma_p^2, \sigma_r^2, \lambda_k, T, a, F, A, \theta_0, \mu_k, \alpha_0, (\sigma_{i,0}^2)_{i=1:2s_k}$ | $\hat{\xi}_{k k}, \hat{\mathbf{m}}_k, \hat{\mathbf{R}}_k$ |

TABLEAU 2.5 – Résumé des différentes méthodes de navigation présentées dans ce chapitre.

De manière générale, les méthodes combinant estimation des biais et estimation de la matrice de covariance semblent plus efficaces que les autres (voir figure 2.31). En revanche, il n'est pas évident de choisir entre les méthodes Weighted LASSO et Fused LASSO. En effet, dans les expérimentations, selon la configuration, il peut être plus intéressant d'ajouter le lissage temporel alors que dans d'autres c'est le contraire. D'un point de vue pratique il nous semble plus simple d'utiliser l'algorithme Weighted LASSO et de surveiller si les variations de biais multitrajet sont en accord avec les valeurs de C/N_0 . Si ce n'est pas le cas, on peut envisager de confirmer ou pas les résultats obtenus avec l'algorithme Fused LASSO.

D'autre part, comme spécifié dans le tableau 2.5, le nombre de paramètres à fixer par l'utilisateur dépend de l'algorithme choisi. Dans notre étude, tous ces paramètres ont été

appris à l'aide de données d'apprentissage. Cependant il pourrait être intéressant de régler ces différents paramètres à l'aide d'informations complémentaires comme précisé ci-dessous

- classification : produire des cartes indiquant les valeurs des hyperparamètres pour une zone donnée
- tests statistiques : reconnaître différents types d'environnement et estimer un vecteur de paramètres pour chaque environnement.

Fusionner les mesures GNSS (pseudodistances et pseudovitesse) avec des mesures issues d'autres capteurs est aussi un domaine de recherche très actif. Nous résumons ci-dessous quelques types de mesures qui pourraient être considérées dans notre contexte

- map matching : utiliser une carte indiquant la position des routes
- utilisation d'un modèle 3D de l'environnement
- vision : identifier la scène dans laquelle le récepteur se trouve pour améliorer le positionnement
- hybridation avec d'autres capteurs : centrales inertielles, odomètres, LIDAR
- utilisation de signaux d'opportunités, comme la 5G.

L'estimation Bayésienne est aussi largement employée pour l'estimation des hyperparamètres d'un problème, et c'est naturellement qu'on peut se poser la question de son utilisation pour notre algorithme de positionnement. C'est ce que nous allons proposer dans le prochain chapitre, qui étudie des stratégies permettant d'estimer les paramètres de régularisation λ_k directement à partir des mesures GNSS.

Chapitre 3

Estimation Bayésienne des hyperparamètres

« *Gotta find a way
A better way
I had better wait* »

Kurt Cobain

Sommaire

| | | |
|------------|--|------------|
| 3.1 | Introduction | 80 |
| 3.2 | Estimation Bayésienne | 80 |
| 3.2.1 | Vraisemblance | 80 |
| 3.2.2 | Loi a posteriori et estimateurs Bayésiens | 80 |
| 3.2.3 | Méthodes MCMC | 81 |
| 3.3 | Application à l'estimation parcimonieuse des biais multitrajets | 82 |
| 3.3.1 | Un modèle Bayésien pour notre problème d'estimation parcimonieuse | 82 |
| 3.3.2 | Lois a priori pour les paramètres \mathbf{x}_k et \mathbf{m}_k | 83 |
| 3.3.3 | Loi a posteriori du modèle Bayésien hiérarchique | 85 |
| 3.3.4 | Modèle hiérarchique proposé | 85 |
| 3.3.5 | Lois conditionnelles des différents paramètres | 86 |
| 3.3.6 | Estimateurs | 87 |
| 3.4 | Expérimentations | 88 |
| 3.4.1 | Données synthétiques | 88 |
| 3.4.2 | Données réelles | 101 |
| 3.5 | Conclusion | 101 |

3.1 Introduction

Nous avons déjà évoqué des concepts d'estimation dans les parties 1.6 et 2.2.1, sans rentrer plus dans les détails. Nous proposons dans cette partie un tour d'horizon de l'estimation paramétrique Bayésienne afin de développer une méthode d'estimation parcimonieuse pour la navigation ne nécessitant pas de réglage de l'hyperparamètre λ_k dans (2.35).

3.2 Estimation Bayésienne

Les statisticiens sont partagés principalement en deux familles distinctes : les fréquentistes, et les Bayésiens. L'analyse fréquentiste cherche à expliquer certaines données (principalement en grand nombre pour justifier l'utilisation de la loi des grands nombres) par un certain nombre de paramètres en se fixant une loi sur ces données sachant les paramètres, la vraisemblance, alors que l'analyse bayésienne cherche à déterminer la loi de ces différents paramètres sachant les mesures, la loi a posteriori, en se servant d'une croyance a priori sur ces paramètres. Nous allons voir ces deux aspects dans la suite.

3.2.1 Vraisemblance

Soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des paramètres à estimer et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ des mesures dépendant de $\boldsymbol{\theta}$, dont on connaît la loi en fonction des paramètres cherchés $\mathbf{y} \sim p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$. La vraisemblance de $\boldsymbol{\theta}$ est définie comme la fonction

$$\mathcal{L} : (\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}). \quad (3.1)$$

On définit alors l'estimateur du maximum de vraisemblance comme le vecteur $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MV}}$ qui maximise cette fonction, i.e.,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MV}} \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}). \quad (3.2)$$

On peut alors montrer que si le modèle est régulier¹, l'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement sans biais, convergent en loi et asymptotiquement efficace [Kay, 1998, Chap. 7].

Cette technique d'estimation est très répandue mais peut présenter quelques inconvénients. En effet, si par exemple le nombre de mesures est petit et que la variance de ces mesures est importante, les valeurs peuvent être loin de la moyenne ce qui va ainsi donner une pauvre estimation de la moyenne. Une technique intéressante est alors d'injecter de l'information a priori sur ce que l'on veut estimer, afin de faire la part des choses entre mesures (observations) et modèle.

3.2.2 Loi a posteriori et estimateurs Bayésiens

Le principe de l'estimation Bayésienne est de construire la loi a posteriori du vecteur recherché conditionnellement aux observation notée $f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. Cette dernière peut s'exprimer à l'aide du théorème de Bayes à l'aide de la vraisemblance des observations $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ ainsi que d'une loi a priori sur le vecteur à estimer $\boldsymbol{\theta}$

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})}, \quad (3.3)$$

où le dénominateur est indépendant de $\boldsymbol{\theta}$. C'est autour de cette dernière loi que va s'articuler l'estimation Bayésienne. On considère alors $\boldsymbol{\theta}$ comme la réalisation d'une variable aléatoire $\boldsymbol{\theta}$ que l'on cherche alors à estimer à l'aide d'un estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})$ minimisant une fonction de coût $\mathbb{E} \left\{ c \left(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) \right) \right\}$. Il existe principalement deux fonctions de coût en estimation Bayésienne

1. l'ensemble $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) > 0\}$ ne dépend pas de $\boldsymbol{\theta}$, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n \mapsto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ est deux fois différentiable

donnant lieu à deux estimateurs : l'estimateur du Maximum A Posteriori (MAP) et du minimum d'erreur quadratique moyenne, ou *Minimum Mean Square Error* (MMSE).

3.2.2.1 Estimateur du Maximum A Posteriori (MAP)

Soit c la fonction coût uniforme définie par

$$c(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\theta_1 - \hat{\theta}_1(\mathbf{y})| > \Delta_1, \dots, |\theta_n - \hat{\theta}_n(\mathbf{y})| > \Delta_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.4)$$

avec $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ arbitrairement petits. On peut alors montrer que l'estimateur Bayésien qui minimise $\mathbb{E}\{c(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}))\}$ est l'estimateur qui maximise la distribution a posteriori (3.3), appelé estimateur MAP et défini par

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n} p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}). \quad (3.5)$$

3.2.2.2 Estimateur du Minimum d'Erreur Quadratique Moyenne (MMSE)

Soit c la fonction coût quadratique définie par

$$c(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})) = \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})\|_2^2. \quad (3.6)$$

On peut alors montrer que l'estimateur Bayésien qui minimise $\mathbb{E}\{c(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}))\}$ est la moyenne de la distribution a posteriori (3.3), appelé estimateur MMSE et défini par

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MMSE}} = \mathbb{E}\{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}\}. \quad (3.7)$$

Dans le cas Gaussien par exemple, les calculs se font facilement et aboutissent à une formulation explicite des estimateurs bayésiens. En général, on peut trouver une loi a priori dont la fonction densité de probabilité, ou *Probability Density Function* (pdf) se manipule bien avec la vraisemblance, appelée loi a priori conjuguée, afin de trouver une densité a posteriori connue. Cependant dans certains cas, la loi a posteriori peut-être difficilement exprimée à l'aide de fonctions usuelles et on ne peut donc donner de formulation explicite des estimateurs Bayésiens : loi non usuelles, grand nombre de paramètres à estimer, expressions non linéaires, non bi-linéaires, ... Heureusement, il existe aujourd'hui des méthodes permettant d'estimer $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP}}$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MMSE}}$ sans passer par une expression explicite. Pour cela, on va simuler des variables aléatoires $\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \boldsymbol{\theta}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\theta}^{(N)}$ suivant la loi $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. Pour N assez grand, $\mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ se calcule comme la moyenne empirique des échantillons simulés, et $\arg \max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ comme la valeur de $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ maximisant $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$.

3.2.3 Méthodes MCMC

Les méthodes MCMC [Pereyra et al. \[2016\]](#) ont pour but de générer une chaîne de Markov ergodique dont la loi stationnaire est $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$, c'est à dire générer des vecteurs $\boldsymbol{\theta}^{(t)}$, $t = 1, \dots, N$ tels que pour t assez grand, $\boldsymbol{\theta}^{(t)} \sim p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. Il existe plusieurs méthodes de génération de ces vecteurs (appelées méthodes MCMC car elles nécessitent la construction d'une chaîne de Markov) qui nécessitent seulement la connaissance à une constante multiplicative près de la loi $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ à simuler et une loi de proposition $q(\boldsymbol{\theta})$ dont le support contient celui de la loi cible. Leur principe est toujours le même

- initialisation de $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$
- génération de $\boldsymbol{x}^{(t)}$ suivant la loi de proposition $q(\boldsymbol{\theta})$
- détermination de $\boldsymbol{\theta}^{(t)}$ par une procédure d'acceptation-rejet de $\boldsymbol{x}^{(t)}$
- élimination des premières valeurs générées afin de garantir que les échantillons traités suivent la distribution cible.

3.2.3.1 L'échantillonneur de Gibbs

Dans la suite de cette thèse, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'échantillonneur de Gibbs dont les principes de base sont

- travailler de manière univariée, i.e., en simulant une composante de $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ à la fois
- utiliser comme loi de proposition pour θ_i sa distribution conditionnelle aux autres paramètres θ_j
- accepter les échantillons proposés avec probabilité 1.

L'algorithme général correspondant est donné dans l'algorithme 4. De par sa nature, cette méthode n'est applicable que si l'on peut effectivement calculer et simuler suivant les différentes lois conditionnelles dans l'échantillonneur.

Algorithme 4 Echantillonneur de Gibbs

```

Initialiser  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ 
pour  $t = 0, \dots, n_{\text{Gibbs}}$  faire
  Générer  $\theta_1^{(t+1)} \sim f(\theta_1 | \theta_2^{(t)}, \theta_3^{(t)}, \dots, \theta_n^{(t)})$ 
  Générer  $\theta_2^{(t+1)} \sim f(\theta_2 | \theta_1^{(t+1)}, \theta_3^{(t)}, \dots, \theta_n^{(t)})$ 
  ...
  Générer  $\theta_n^{(t+1)} \sim f(\theta_n | \theta_2^{(t+1)}, \theta_3^{(t+1)}, \dots, \theta_{n-1}^{(t+1)})$ 
fin pour

```

3.2.3.2 Complétion

Une astuce, qui nous sera utile pour la suite, consiste à introduire des variables intermédiaires qui peuvent faciliter les étapes de l'échantillonneur. On appelle complétion de f toute loi jointe g telle que

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \int g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \quad (3.8)$$

i.e., telle que f est une loi marginale de g . Si la loi jointe g est plus facile à échantillonner que f , au lieu de générer $\boldsymbol{\theta}$ suivant f dans l'échantillonneur, on générera plutôt un couple $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ suivant g .

3.3 Application à l'estimation parcimonieuse des biais multi-trajets

L'objectif de cette partie est de développer un algorithme de type "Bayesian LASSO" [Park et Casella \[2008\]](#) permettant d'estimer conjointement les paramètres du modèle (2.34) et les paramètres de régularisation associés.

3.3.1 Un modèle Bayésien pour notre problème d'estimation parcimonieuse

Reprenons le modèle présenté dans la partie 1.6.2

$$\boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{F}_{k-1} \boldsymbol{\xi}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{m}_k + \mathbf{n}_k \quad (3.10)$$

avec

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\xi}_k - \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{u}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{u}_{k-1}; \mathbf{0}, \mathbf{Q}_{k-1}) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{n}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_k; \mathbf{0}, \mathbf{R}_k), \quad \mathbf{R}_k = \text{diag} \left(\sigma_{i,k}^2 \right)_{i=1, \dots, s_k}. \quad (3.13)$$

On dispose donc d'une vraisemblance

$$\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{m}_k, \mathbf{R}_k). \quad (3.14)$$

Pour trouver les estimateurs Bayésiens de \mathbf{x}_k et \mathbf{m}_k , on voudrait calculer la loi a posteriori $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k | \mathbf{y}_{1:k})$, et comme expliqué dans la partie précédente, on doit alors définir des loi a priori sur \mathbf{x}_k et \mathbf{m}_k .

3.3.2 Lois a priori pour les paramètres \mathbf{x}_k et \mathbf{m}_k

Nous supposons que les paramètres \mathbf{x}_k et \mathbf{m}_k sont indépendants, c'est à dire

$$f(\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k) = f(\mathbf{x}_k) f(\mathbf{m}_k) \quad (3.15)$$

3.3.2.1 Le vecteur d'état

Pour le vecteur d'état, nous allons plutôt travailler sur sa variation, afin de profiter de la linéarité de l'équation de mesure correspondante, définie à l'équation (1.96) par

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \boldsymbol{\xi}_k - \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} \\ &= \boldsymbol{\xi}_k - \mathbf{F}_{k-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$= \mathbf{F}_{k-1} (\boldsymbol{\xi}_{k-1} - \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1}) + \mathbf{u}_{k-1}. \quad (3.17)$$

La théorie du filtre de Kalman permet d'obtenir

$$\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{0}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \quad (3.18)$$

où l'expression de $\mathbf{P}_{k|k-1}$ dépend de $\mathbf{y}_{1:k-1}$ et est donnée dans l'équation (1.91), qui nous servira donc de loi a priori sur \mathbf{x}_k . Dans la suite nous abandonnerons la notation du conditionnement par rapport à $\mathbf{y}_{1:k-1}$ afin d'alléger les expressions, mais il faut garder en tête que $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}$ et $\mathbf{P}_{k|k-1}$ sont des fonctions de $\mathbf{y}_{1:k-1}$

3.3.2.2 Le vecteur de biais multitrajet

Les composantes du vecteur \mathbf{m}_k sont nulles en l'absence de multitrajet, et non-nulles en leur présence. Nous devons choisir une loi a priori favorisant cette parcimonie. La loi naturelle découlant du problème LASSO est la loi de Laplace de moyenne nulle et de paramètre $\frac{1}{\lambda_k}$ **Park et Casella [2008]**. On choisit donc comme loi a priori sur $m_{i,k}$ une loi de Laplace de paramètre $\frac{1}{\lambda_k w_{i,k}}$ et de moyenne nulle, notée $\mathcal{L} \left(m_{i,k}; 0, \frac{1}{\lambda_k w_{i,k}} \right)$ dont la pdf est telle que

$$m \sim \mathcal{L}(m; \mu, \sigma) \Leftrightarrow p(m | \mu, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} \exp \left(-\frac{|m - \mu|}{\sigma} \right) \quad (3.19)$$

Comme les pdf précédemment définies ne sont pas facilement manipulables à cause des différentes valeurs absolues, nous allons utiliser une complétion comme présenté dans la partie 3.2.3.2, et associer à chaque $m_{i,k}$ une variable intermédiaire $\tau_{i,k}^2$ comme cela a été proposé dans **Park et Casella [2008]**

$$\frac{w_{i,k} \lambda_k}{2} \exp(-w_{i,k} \lambda_k |m_{i,k}|) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp \left(-\frac{m_{i,k}^2}{2s} \right) \frac{w_{i,k}^2 \lambda_k^2}{2} \exp \left(-\frac{w_{i,k}^2 \lambda_k^2 s}{2} \right) ds. \quad (3.20)$$

On observe que la loi de Laplace pour la variable $m_{i,k}$ est la loi marginale de la loi jointe de $m_{i,k}$ et d'une variable intermédiaire $\tau_{i,k}^2$ (le carré permet de faire le parallèle avec une variance)

$$f(m_{i,k}, \tau_{i,k}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} \exp\left(-\frac{m_{i,k}^2}{2\tau_{i,k}^2}\right) \frac{w_{i,k}^2 \lambda_k^2}{2} \exp\left(-\frac{w_{i,k}^2 \lambda_k^2 \tau_{i,k}^2}{2}\right) \quad (3.21)$$

qui est donc le produit de la pdf d'une loi normale de moyenne nulle et de variance $\tau_{i,k}^2$ (pour la variable $m_{i,k}$) et de la pdf d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{2}{w_{i,k}^2 \lambda_k^2}$ pour la variable $\tau_{i,k}^2$.

On note cette dernière $\mathcal{E}\left(\frac{2}{\lambda_k^2 w_{i,k}^2}\right)$ et sa pdf est telle que

$$\tau_{i,k}^2 \sim \mathcal{E}(\tau_i^2; \gamma) \Leftrightarrow p(\tau_{i,k}^2 | \gamma) = \frac{1}{\gamma} \exp\left(-\frac{\tau_{i,k}^2}{\gamma}\right) 1_{\mathbb{R}^+}(\tau_{i,k}^2) \quad (3.22)$$

où $1_{\mathbb{R}^+}(\cdot)$ désigne la fonction indicatrice sur \mathbb{R}^+ . On obtient finalement les lois a priori qui seront utilisées pour construire l'échantillonneur de Gibbs

$$\tau_{i,k}^2 | \lambda_k \sim \mathcal{E}\left(\tau_{i,k}^2; \frac{2}{\lambda_k^2 w_{i,k}^2}\right), \text{ pour } i = 1, \dots, 2s_k \quad (3.23)$$

$$m_{i,k} | \tau_{i,k}^2 \sim \mathcal{N}\left(m_{i,k}; 0, \tau_{i,k}^2\right). \quad (3.24)$$

En supposant l'indépendance des différents couples $(m_{i,k}, \tau_{i,k}^2)$ et en rassemblant les variables $\tau_{i,k}^2$ dans un vecteur $\boldsymbol{\tau}_k^2$, on obtient

$$\begin{aligned} f(\mathbf{m}_k, \boldsymbol{\tau}_k^2 | \lambda_k) &= \prod_{i=1}^{2s_k} f(m_{i,k}, \tau_{i,k}^2 | \lambda_k) \\ &= \prod_{i=1}^{2s_k} f(m_{i,k} | \tau_{i,k}^2) f(\tau_{i,k}^2 | \lambda_k) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$= f(\mathbf{m}_k | \boldsymbol{\tau}_k^2) f(\boldsymbol{\tau}_k^2 | \lambda_k). \quad (3.26)$$

On déduit de l'indépendance (3.15) et des équations (3.18) et (3.26) la loi a priori des différents paramètres, en notant $\boldsymbol{\theta}_k = (\mathbf{x}_k^T, \mathbf{m}_k^T, \boldsymbol{\tau}_k^{2T})^T$

$$f(\boldsymbol{\theta}_k | \lambda_k^2) = f(\mathbf{x}_k) f(\mathbf{m}_k | \boldsymbol{\tau}_k^2) f(\boldsymbol{\tau}_k^2 | \lambda_k^2) \quad (3.27)$$

3.3.2.3 Loi a priori de l'hyperparamètre

Pour estimer l'hyperparamètre λ_k , il est devenu classique de lui associer une loi a priori, ce qui définit un modèle Bayésien hiérarchique. Ici, il est plus simple de définir une loi a priori pour λ_k^2 (au lieu de λ_k), et nous allons choisir une loi a priori non informative de Jeffreys [Robert et al. \[2009\]](#), définie par

$$p(\lambda_k^2) \propto \sqrt{\mathbb{E}_{\boldsymbol{\tau}_k^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_k^2} \ln(f(\boldsymbol{\tau}_k^2 | \lambda_k^2)) \right)^2 \right]}. \quad (3.28)$$

Dans notre cas, on peut montrer que l'on a

$$p(\lambda_k^2) \propto \frac{1}{\lambda_k^2} 1_{\mathbb{R}^+}(\lambda_k^2). \quad (3.29)$$

Cette loi a priori sur \mathbb{R}^+ est impropre (son intégrale diverge), mais la loi a posteriori qui en découle ne l'est pas et on peut donc l'utiliser comme loi non informative a priori sur λ_k^2 .

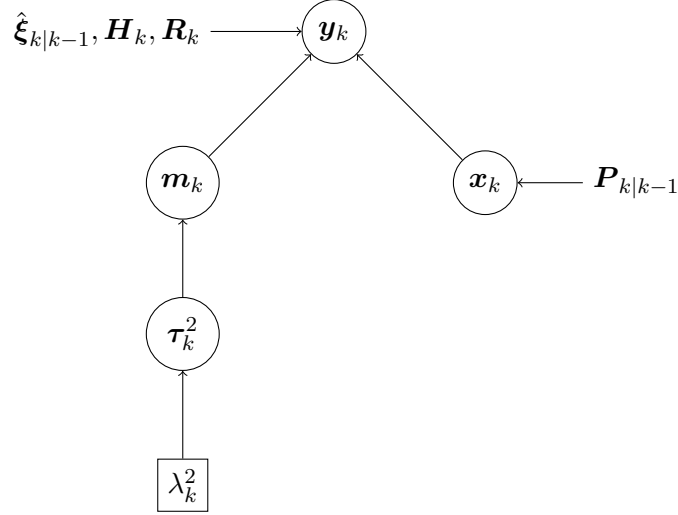


FIGURE 3.1 – Graphe de la hiérarchie utilisée pour le modèle Bayésien pour le traitement des multitrajets GNSS.

3.3.3 Loi a posteriori du modèle Bayésien hiérarchique

La loi a posteriori du modèle Bayésien précédent peut se calculer à l'aide de la formule de Bayes

$$f(\boldsymbol{\theta}_k, \lambda_k^2 | \mathbf{y}_k) \propto f(\mathbf{y}_k | \boldsymbol{\theta}_k) f(\boldsymbol{\theta}_k | \lambda_k^2) f(\lambda_k^2) \quad (3.30)$$

où $f(\mathbf{y}_k | \boldsymbol{\theta}_k)$ est donnée dans (3.14), $f(\boldsymbol{\theta}_k | \lambda_k^2)$ est donnée dans (3.27) et $f(\lambda_k^2)$ est donnée dans (3.29). Le calcul direct des estimateurs Bayésiens ne semble pas possible avec une telle expression. Nous proposons donc d'utiliser un échantillonneur de Gibbs comme présenté dans la partie 3.2.3.1.

3.3.4 Modèle hiérarchique proposé

Le modèle Bayésien hiérarchique correspondant à la vraisemblance et aux lois a priori données précédemment est

$$\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k, \sim \mathcal{N}(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{m}_k, \mathbf{R}_k) \quad (3.31)$$

$$\mathbf{x}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{0}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \quad (3.32)$$

$$\mathbf{m}_k | \tau_{i,k}^2 \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_k; \mathbf{0}, \mathbf{D}_{\tau^2}) \quad \text{où } \mathbf{D}_{\tau^2} = \text{diag}(\tau_{i,k}^2)_{i=1, \dots, 2s_k} \quad (3.33)$$

$$\tau_{i,k}^2 | \lambda_k^2 \sim \mathcal{E}\left(\tau_{i,k}^2; \frac{2}{\lambda_k^2 w_{i,k}^2}\right), \quad \text{pour } i = 1, \dots, 2s_k \quad (3.34)$$

$$f(\lambda_k^2) \propto \frac{1}{\lambda_k^2} \quad (3.35)$$

Cette hiérarchie est résumée dans le graphe de la figure 3.1. On va déduire de cette hiérarchie les lois conditionnelles de chacun des paramètres (qui seront les lois de proposition de l'échantillonneur de Gibbs).

3.3.5 Lois conditionnelles des différents paramètres

3.3.5.1 Loi conditionnelle de $\tau_{i,k}^2$

La loi conditionnelle de $\tau_{i,k}^2$ dépend de la valeur de $b_{i,k}$. On a pour $i = 1, \dots, 2s_k$

$$\begin{aligned} f(\tau_{i,k}^2 | m_{i,k}, \lambda_k^2) &\propto \exp\left(-\frac{w_{i,k}^2 \lambda_k^2 \tau_{i,k}^2}{2}\right) (\tau_{i,k}^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{m_{i,k}^2}{2\tau_{i,k}^2}\right) \\ &\propto (\tau_{i,k}^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(w_{i,k}^2 \lambda_k^2 \tau_{i,k}^2 + \frac{m_{i,k}^2}{\tau_{i,k}^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

et donc

$$f(\tau_{i,k}^2 | m_{i,k}, \lambda_k, b_{i,k}) = \mathcal{GIG}\left(\tau_{i,k}^2; \frac{1}{2}, w_{i,k}^2 \lambda_k^2, m_{i,k}^2\right) \quad (3.37)$$

où $\mathcal{GIG}(x; p, a, b)$ désigne la loi inverse Gaussienne généralisée pour la variable x de paramètres p, a et b dont la densité vaut

$$f(x) \propto x^{p-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(ax + \frac{b}{x}\right)\right). \quad (3.38)$$

N.B., on a l'équivalence

$$\begin{aligned} \tau_{i,k}^2 | m_{i,k}, \lambda_k, b_{i,k} &\sim \mathcal{GIG}\left(\tau_{i,k}^2; \frac{1}{2}, w_{i,k}^2 \lambda_k^2, m_{i,k}^2\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\tau_{i,k}^2} | m_{i,k}, \lambda_k, b_{i,k} &\sim \mathcal{IN}\left(\frac{1}{\tau_{i,k}^2}; \sqrt{\frac{\lambda_k^2 w_{i,k}^2}{m_{i,k}^2}}, \lambda_k^2 w_{i,k}^2\right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

où $\mathcal{IN}(x; \mu, \lambda)$ désigne la loi inverse Gaussienne pour la variable x de paramètres μ et λ dont la densité vaut

$$f(x) \propto x^{-3/2} \exp\left(-\frac{\lambda(x - \mu)^2}{2\mu^2 x}\right) \quad (3.40)$$

qui est plus facile à générer qu'une loi inverse Gaussienne généralisée. L'algorithme permettant de générer $\tau_{i,k}^2 \sim \mathcal{IN}(\tau_i^2; \mu, \lambda)$ est donné dans l'algorithme 5, comme expliqué dans [Michael et al. \[1976\]](#).

Algorithme 5 Générateur de loi inverse Gaussienne $x \sim \mathcal{IN}(x; \mu, \lambda)$

```

Tirer  $\nu \sim \mathcal{N}(\nu; 0, 1)$ 
Prendre  $a = \nu^2$ 
Poser  $b = \mu + \frac{\mu^2 y}{2\lambda} - \frac{\mu}{2\lambda} \sqrt{4\mu\lambda y + \mu^2 y^2}$ 
Tirer  $c \sim \mathcal{U}_{[0;1]}(c)$ 
si  $c \leq \frac{\mu}{\mu+b}$  alors
  Prendre  $x = b$ 
sinon
  Prendre  $x = \frac{\mu^2}{b}$ 
fin si

```

3.3.5.2 Lois conditionnelles des biais multitrajet m_k

La loi conditionnelle de $m_{i,k}$ est donnée par

$$\begin{aligned} f(\mathbf{m}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\tau}_k^2) &\propto f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k) f(\mathbf{m}_k | \boldsymbol{\tau}_k^2) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k)\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{m}_k^T \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}^2}^{-1} \mathbf{m}_k\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\mathbf{m}_k^T (\mathbf{R}_k^{-1} + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}^2}^{-1}) \mathbf{m}_k - 2 \mathbf{m}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)\right)\right) \end{aligned}$$

où on reconnaît la pdf d'une loi normale multivariée de paramètres

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathbf{m}_k} &= (\mathbf{R}_k^{-1} + \mathbf{D}_{\tau^2}^{-1})^{-1} \\ &= \text{diag} \left(\frac{\sigma_{i,k}^2 \tau_{i,k}^2}{\sigma_{i,k}^2 + \tau_{i,k}^2} \right)_{i=1, \dots, s_k}\end{aligned}\quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{m}_k} &= (\mathbf{R}_k^{-1} + \mathbf{D}_{\tau^2}^{-1})^{-1} \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k) \\ &= (I_{2s_k} + \mathbf{R}_k \mathbf{D}_{\tau^2}^{-1})^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k) \\ &= \text{diag} \left(\frac{\tau_{i,k}^2}{\sigma_{i,k}^2 + \tau_{i,k}^2} \right)_{i=1, \dots, s_k} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)\end{aligned}\quad (3.42)$$

et donc

$$\mathbf{m}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k, \tau_k^2 \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_k; \mu_{\mathbf{m}_k}, \Sigma_{\mathbf{m}_k}). \quad (3.43)$$

3.3.5.3 Loi conditionnelle de \mathbf{x}_k

La loi conditionnelle de \mathbf{x}_k se calcule à l'aide de la théorie du filtre de Kalman. On obtient

$$\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{m}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{m}_k), \mathbf{P}_{k|k}) \quad (3.44)$$

où \mathbf{K}_k et $\mathbf{P}_{k|k}$ désignent la matrice de gain de Kalman et la matrice de covariance de l'innovation, et sont définies respectivement dans les équations (1.102) et (1.104).

3.3.5.4 Loi conditionnelle de λ_k

On a

$$f(\lambda_k^2 | \tau_k^2) \propto \prod_{i=1}^{2s_k} \lambda_k^2 \exp \left(-\frac{w_{i,k}^2 \lambda_k^2 \tau_{i,k}^2}{2} \right) (\lambda_k^2)^{-1} \quad (3.45)$$

$$\propto (\lambda_k^2)^{2s_k-1} \exp \left(-\lambda_k^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2s_k} w_{i,k}^2 \tau_{i,k}^2 \right) \right) \quad (3.46)$$

et donc

$$f(\lambda_k^2 | \tau_k^2) = \mathcal{G} \left(\lambda_k^2; 2s_k, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2s_k} w_{i,k}^2 \tau_{i,k}^2 \right) \quad (3.47)$$

où $\mathcal{G}(a; \alpha, \beta)$ désigne la loi Gamma en a de paramètres α et β .

3.3.5.5 Echantillonneur de Gibbs

L'échantillonneur de Gibbs correspondant au modèle hiérarchique (3.31) à (3.35) est donné dans l'algorithme 6.

3.3.6 Estimateurs

Nous allons utiliser ici l'un des deux estimateurs Bayésiens présentés précédemment : l'estimateur MMSE, i.e., pour $\boldsymbol{\eta}_k \in \{\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k, \tau_k^2, \lambda_k\}$, on prend la moyenne des vecteurs générés après une période de chauffe (*burn-in*), qui élimine les premiers échantillons générés car ils ne sont pas encore distribués suivant la distribution cible (les méthodes MCMC ne génèrent des vecteurs distribués suivant la loi cible qu'asymptotiquement)

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_k = \frac{1}{n_{\text{Gibbs}} - n_{\text{burn-in}}} \sum_{t=n_{\text{burn-in}}+1}^{n_{\text{Gibbs}}} \boldsymbol{\eta}_k^{(t)}. \quad (3.48)$$

Algorithme 6 Echantillonneur de Gibbs

```

Initialiser  $\mathbf{x}_k^{(0)}, \mathbf{m}_k^{(0)}, \boldsymbol{\tau}_k^{2(0)}, (\lambda_k^2)^{(0)}$ 
pour  $t = 1, \dots, n_{\text{Gibbs}}$  faire
  pour  $i = 1, \dots, 2s_k$  faire
    Tirer  $\tau_i^{2(t)}$  suivant  $f(\tau_{i,k}^2 | m_{i,k}^{(t-1)}, \lambda_k^{(t-1)})$ 
  fin pour
  Tirer  $\mathbf{m}_k^{(t)}$  suivant  $f(\mathbf{m}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\tau}_k^2)$ 
  Tirer  $(\lambda_k^2)^{(t)}$  suivant  $f(\lambda_k^2 | \boldsymbol{\tau}_k^{2(t)})$ 
  Tirer  $\mathbf{x}_k^{(t)}$  suivant  $f(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{m}_k^{(t)})$ 
fin pour

```

3.4 Expérimentations

3.4.1 Données synthétiques

Nous avons généré des données avec et sans multitrajets à l'aide du système défini par les équations (3.9) et (3.10) pour $k = 1, \dots, 140$. Pour le bruit de mesure, nous avons choisi une matrice de covariance \mathbf{R}_k comme dans (1.73). Pour les biais multitrajets, nous avons fixé plusieurs dates d'apparition/disparition de biais pour 4 satellites, ainsi qu'une valeur initiale non nulle et un modèle d'évolution

$$m_{i,k+1} = m_{i,k} + \nu_{i,k}, \quad \nu_{i,k} \sim \mathcal{N}(\nu_{i,k}, \sigma_{i,m}^2) \quad (3.49)$$

avec $\sigma_{i,m} = 0.1\text{m}$ pour les pseudodistances ($i = 1, \dots, s_k$) et $\sigma_{i,m} = 0.01\text{m}$ pour les pseudovitesse ($i = s_k+1, \dots, 2s_k$). Plus précisément ; les valeurs des biais multitrajet sont représentées sur les figures ci-dessous.

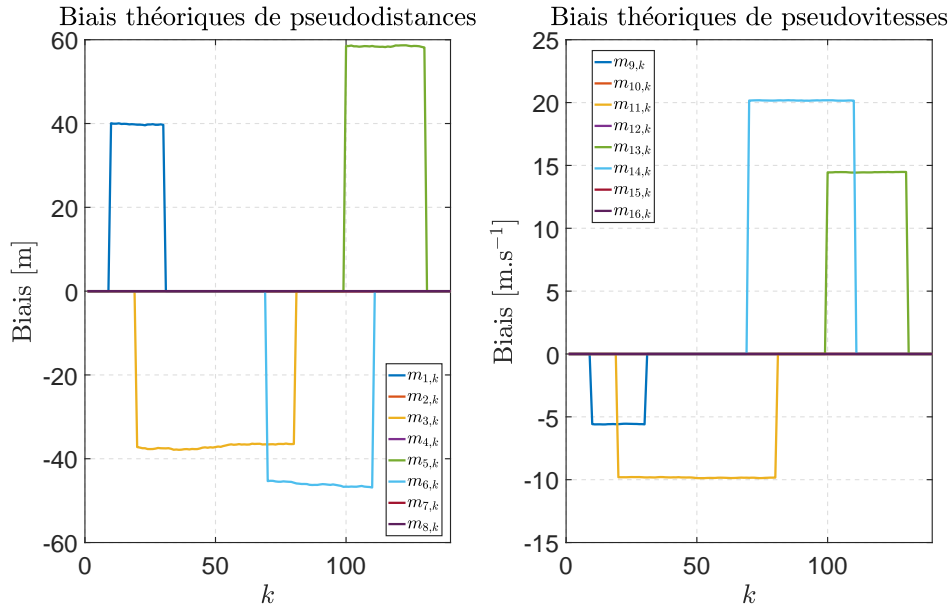


FIGURE 3.2 – Biais de mesure théoriques pour les pseudodistances (à gauche) et les pseudovitesse (à droite).

Pour l'échantillonneur de Gibbs, on fixe le nombre d'itérations à $n_{\text{Gibbs}} = 1000$ avec une période de chauffe de longueur $n_{\text{burn-in}} = 100$. La valeur de ce paramètre $n_{\text{burn-in}}$ a été obtenue à l'aide d'un critère de convergence appelé *Potential Scale Reduction Factor* (PSRF) calculé à partir de 10 chaînes en parallèles de manière à ce qu'il n'excède pas 1.2 comme conseillé dans Brooks et Gelman [1998] (le PSRF max pour $k \in \{0, \dots, 140\}$ est égal à 1.0079

dans cette simulation). Les résultats d'estimation des biais pour la méthode Bayésienne et la méthode étudiée dans le chapitre précédent supposant $\lambda_k = 1$ sont donnés dans la figure 3.3 pour les pseudodistances et dans la figure 3.4 pour les pseudovitesse avec 200 itérations de Monte-Carlo. L'erreur de position correspondante est donnée dans les figures 3.5 dont un zoom est donné figure 3.6. On remarque que les deux méthodes proposées donnent des résultats équivalents, nettement meilleurs que ceux obtenus avec un EKF. Les estimateurs des biais de pseudodistance obtenus avec la méthode Bayésienne semblent légèrement biaisés mais avec une variance plus faible, notamment pour des biais théoriquement nuls. De plus, la méthode Bayésienne a l'avantage d'estimer les hyperparamètres conjointement avec les autres paramètres du modèle alors que la méthode wLASSO doit être lancée plusieurs fois pour estimer ces hyperparamètres par validation croisée.

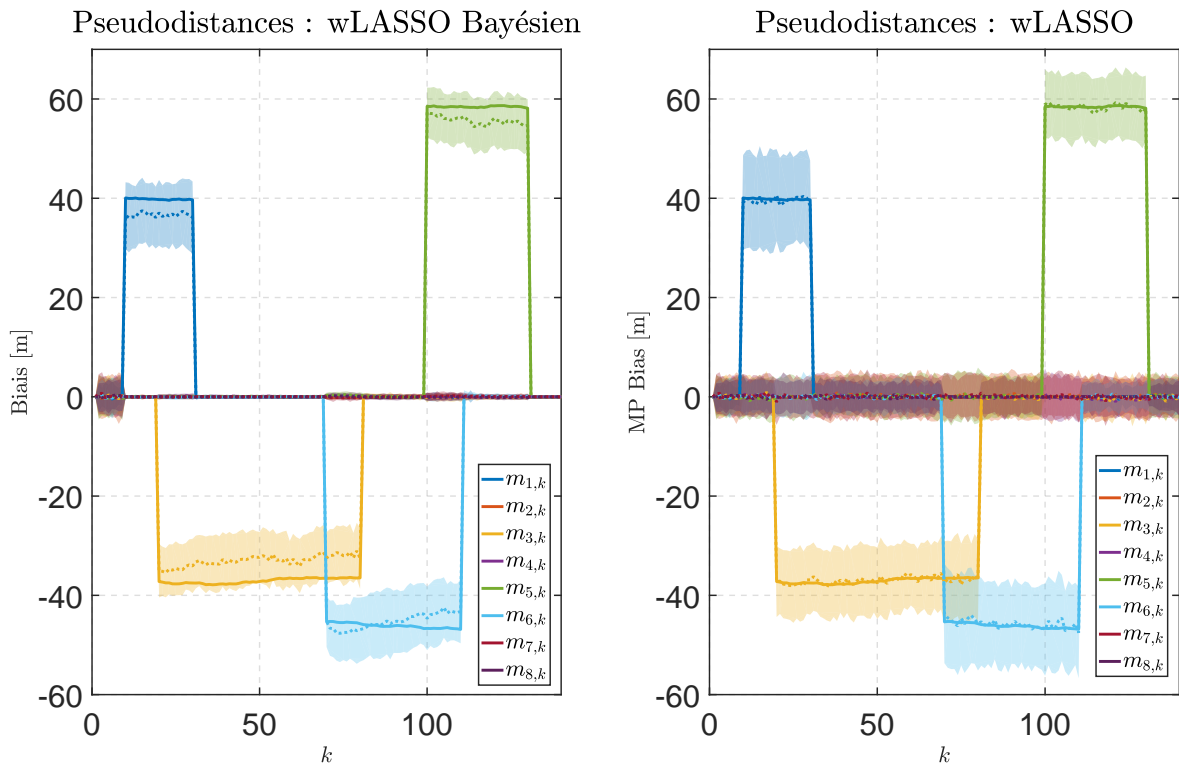


FIGURE 3.3 – Biais de mesure estimés moyens (pointillés) plus ou moins les variances associées et biais théoriques (traits plein) pour les pseudodistances pour la méthode weighted LASSO Bayésienne (à gauche) et la méthode weighted LASSO avec $\lambda_k=1$.

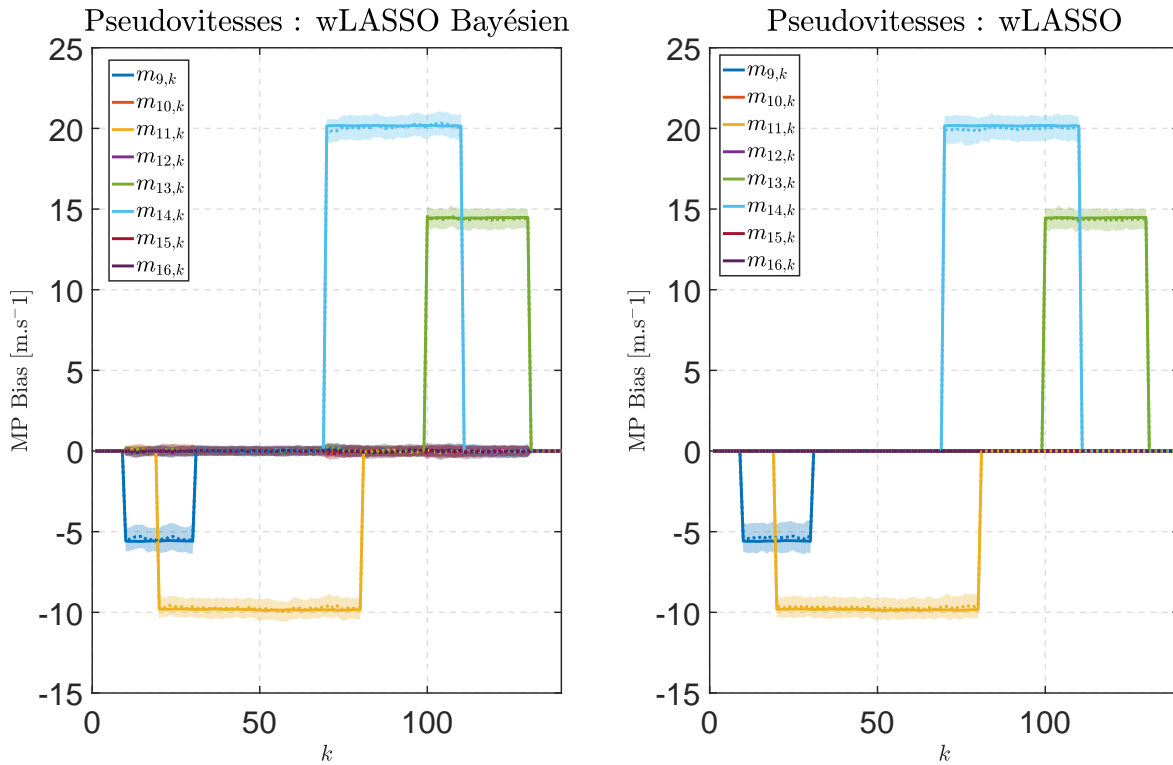


FIGURE 3.4 – Biais de mesure estimés moyens (pointillés) plus ou moins les variances associées et biais théoriques (traits plein) pour les pseudovitesse pour la méthode weighted LASSO Bayésienne (à gauche) et la méthode weighted LASSO avec $\lambda_k=1$.

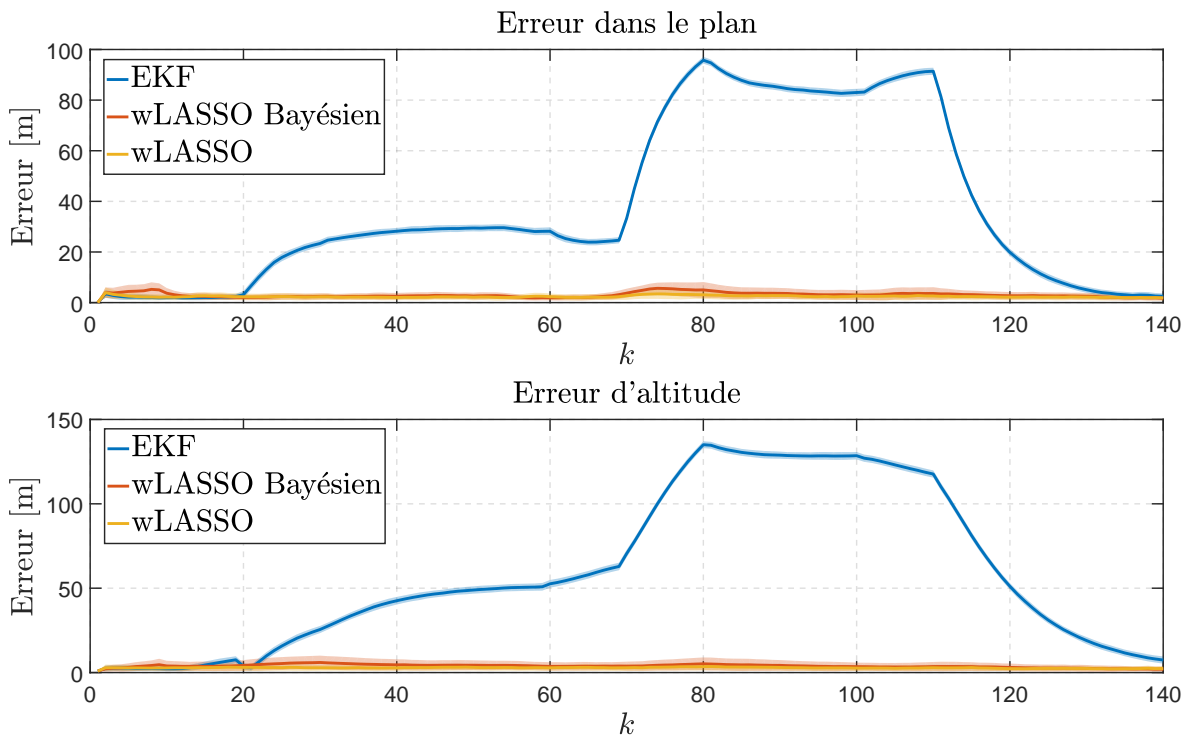


FIGURE 3.5 – Erreurs de position au cours du temps pour le filtre EKF, l'algorithme LASSO pondéré (wLASSO) et l'algorithme proposé (wLASSO Bayésien).

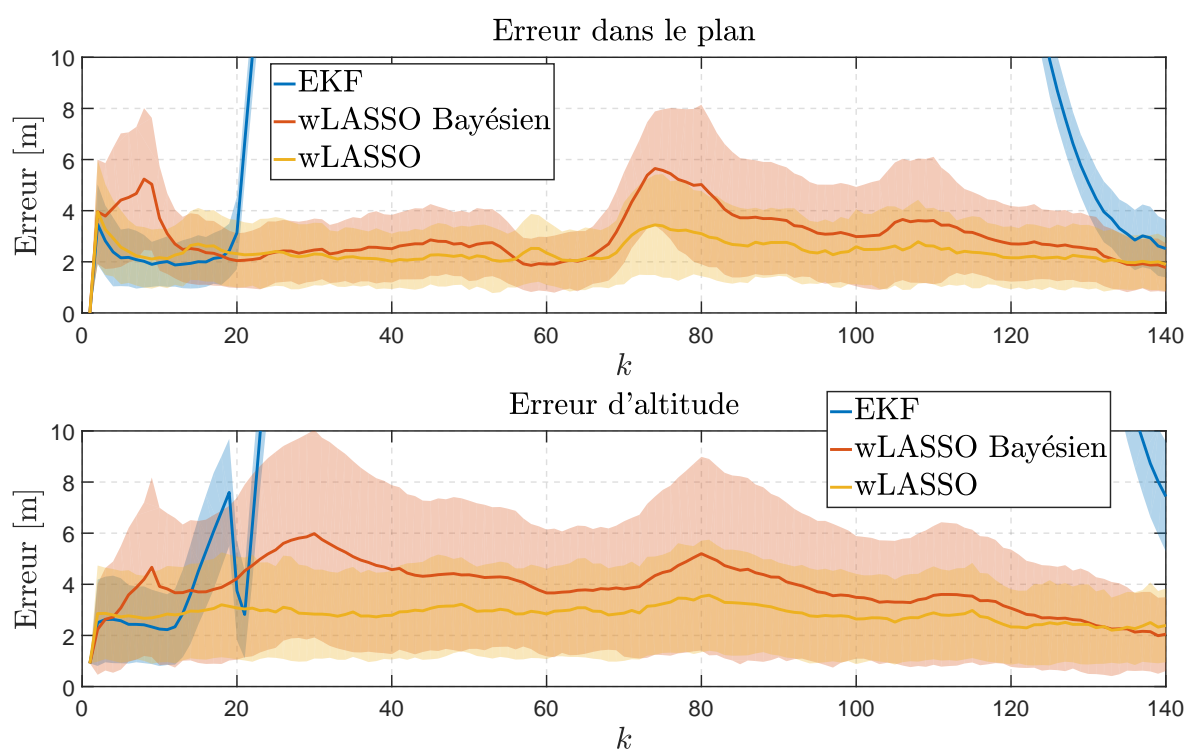


FIGURE 3.6 – Erreurs de position au cours du temps pour le filtre EKF, l’algorithme LASSO pondéré (wLASSO) et l’algorithme proposé (wLASSO Bayésien).

La figure 3.7 montre les résultats d'estimation de l'hyperparamètre λ_k et le nombre de multitrajets théoriques (en rouge). On remarque que pour $k > 120$, les valeurs estimées de l'hyperparamètre explosent, avec une très grosse variance, ce qui correspond à l'absence théorique de multitrajets (on aurait pu s'attendre au même résultat pour $k < 10$, mais une étape d'initialisation est effectuée à ces instants par la méthode à λ_k fixé, donc les valeurs pour $k < 10$ ne nous intéressent pas dans cette discussion). On voit très clairement que l'apparition ou la disparition d'un multitrajet mènent respectivement à une diminution ou une augmentation de l'hyperparamètre estimé, ce qui correspond à la discussion menée après l'équation 2.5 (la discussion concernait la pseudo-norme ℓ_0 , mais elle reste valable pour la norme ℓ_1).

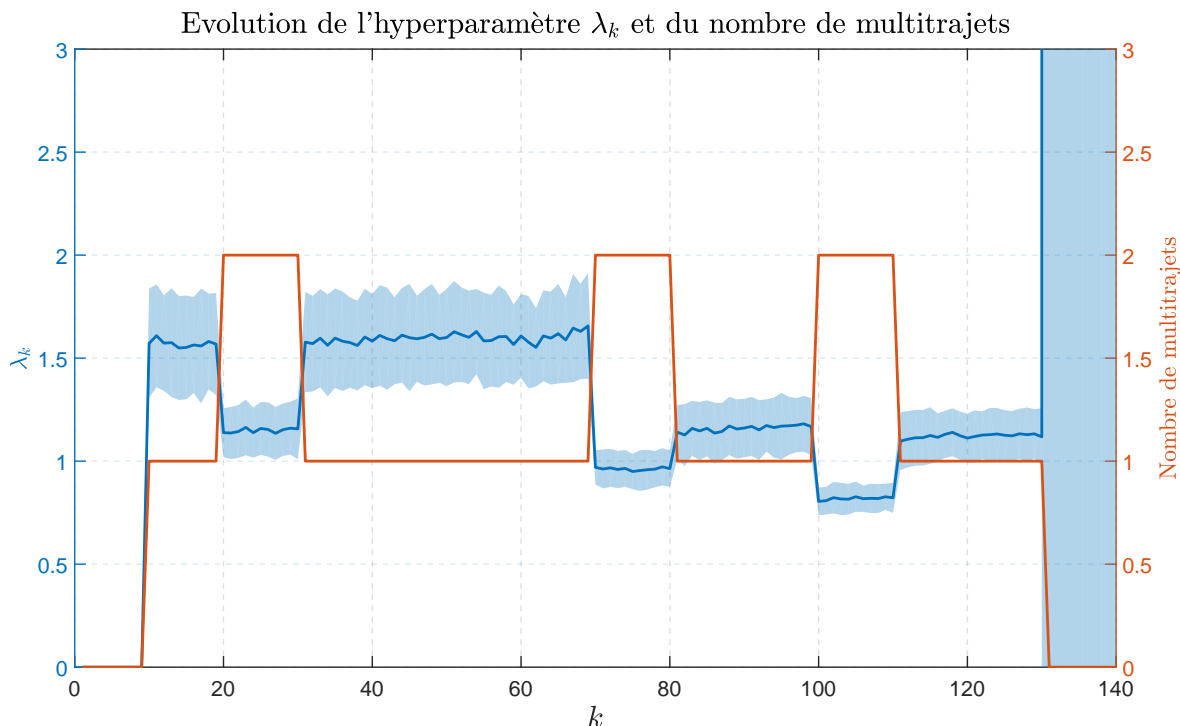


FIGURE 3.7 – Estimation de l'hyperparamètre λ_k et nombre de multitrajets au cours du temps.

D'autre part, la méthode proposée offre en plus une estimation des lois a posteriori des différents paramètres, qui permet de déterminer des mesures de confiance pour les paramètres estimés. Nous proposons donc de représenter ces différentes distributions pour 3 instants différents, correspondant à la présence de 0, 1, et 2 multitrajets.

3.4.1.1 Lois a posteriori en absence de multitrajet

Nous avons représenté dans la figure 3.8 les histogrammes estimés des biais pseudo-distances pour tous les satellites et dans la figure 3.9 les histogrammes estimés des biais pseudovitesse pour tous les satellites. On peut remarquer que les lois a posteriori obtenues sont toutes centrées en 0 avec une variance très faible, ce qui est cohérent avec l'absence de multitrajet pour chacun des satellites. A titre indicatif, les histogrammes estimés du vecteur d'état (position \mathbf{r}_k et biais d'horloge b_k) sont donnés dans la figure 3.10, et les histogrammes estimés du vecteur d'état (vitesse \mathbf{v}_k et dérive d'horloge \dot{b}_k) dans la figure 3.11. Finalement, nous avons représenté dans la figure 3.12 l'histogramme estimé de l'hyperparamètre λ_k en absence de multitrajet. On remarque que ce dernier est proportionnel à $1/\lambda_k$, et aurait une moyenne tendant vers $+\infty$ si on augmentait le nombre d'échantillons, ce qui est caractéristique d'un vecteur parcimonieux nul.

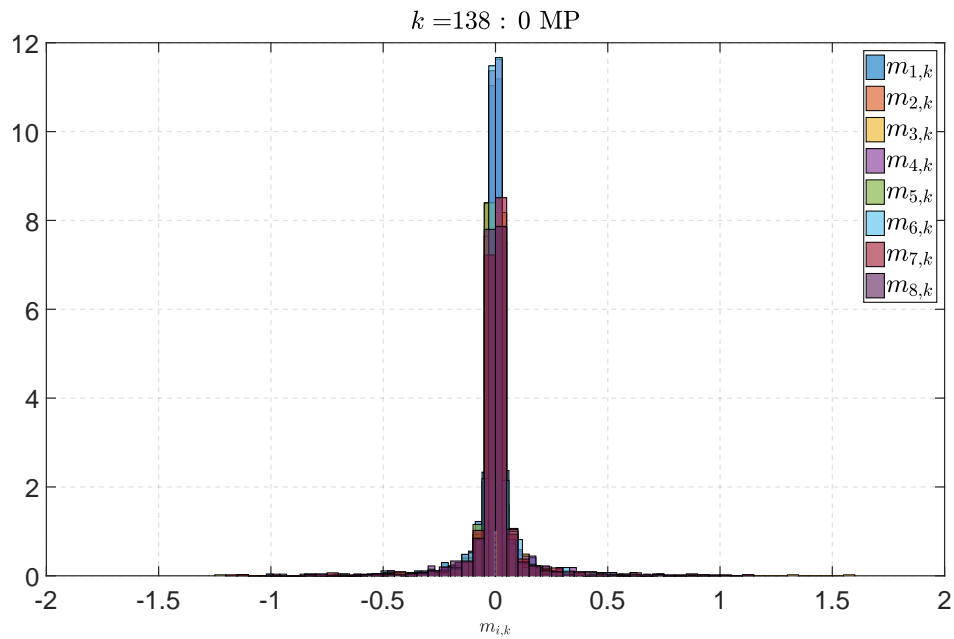


FIGURE 3.8 – Histogrammes des biais multitrajet estimés pour les pseudodistances de chaque satellite en l’absence de multitrajet, biais estimés (pointillés) et biais théoriques (traits pleins).

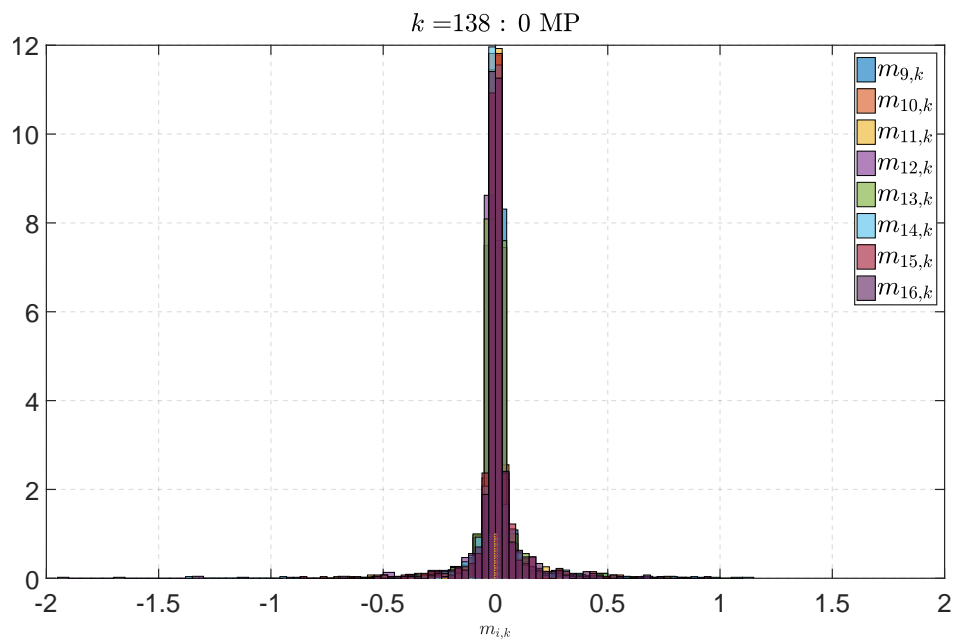


FIGURE 3.9 – Histogrammes des biais multitrajet estimés pour les pseudovitesse de chaque satellite en l’absence de multitrajet, biais estimés (pointillés) et biais théoriques (traits pleins).

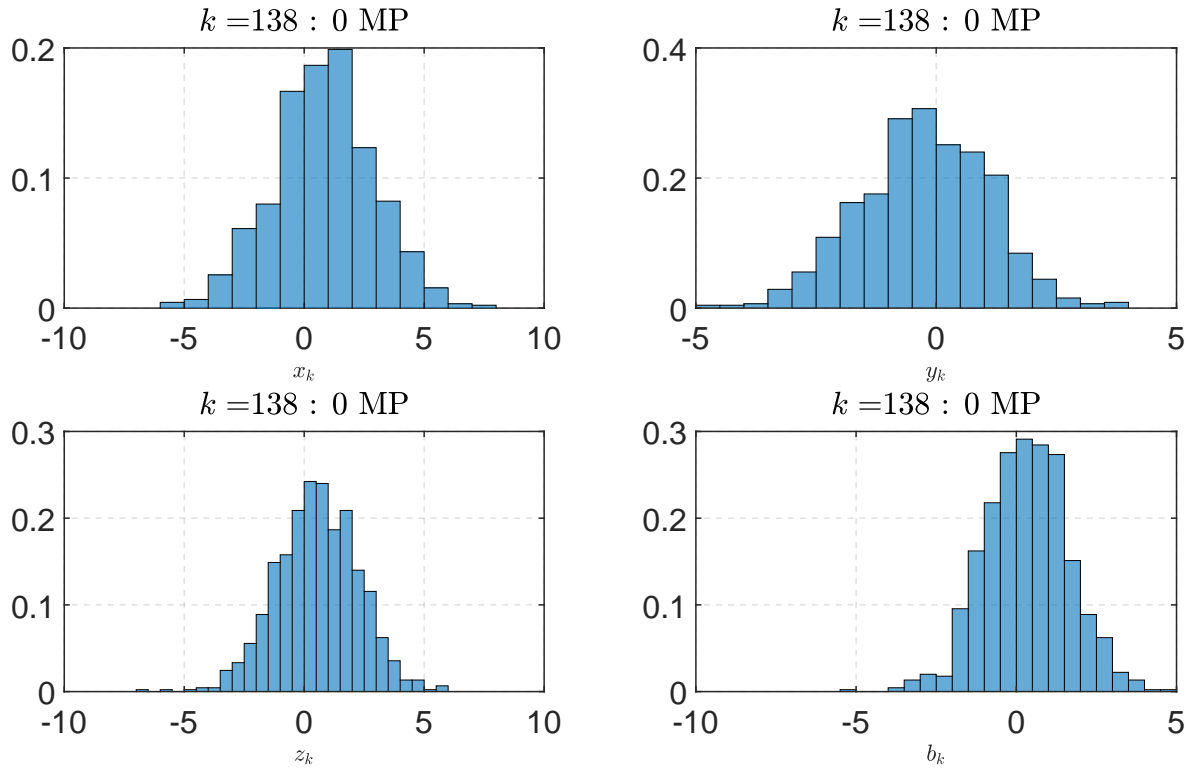


FIGURE 3.10 – Histogrammes du vecteur d'état estimés (position et biais d'horloge) en l'absence de multitrajet.

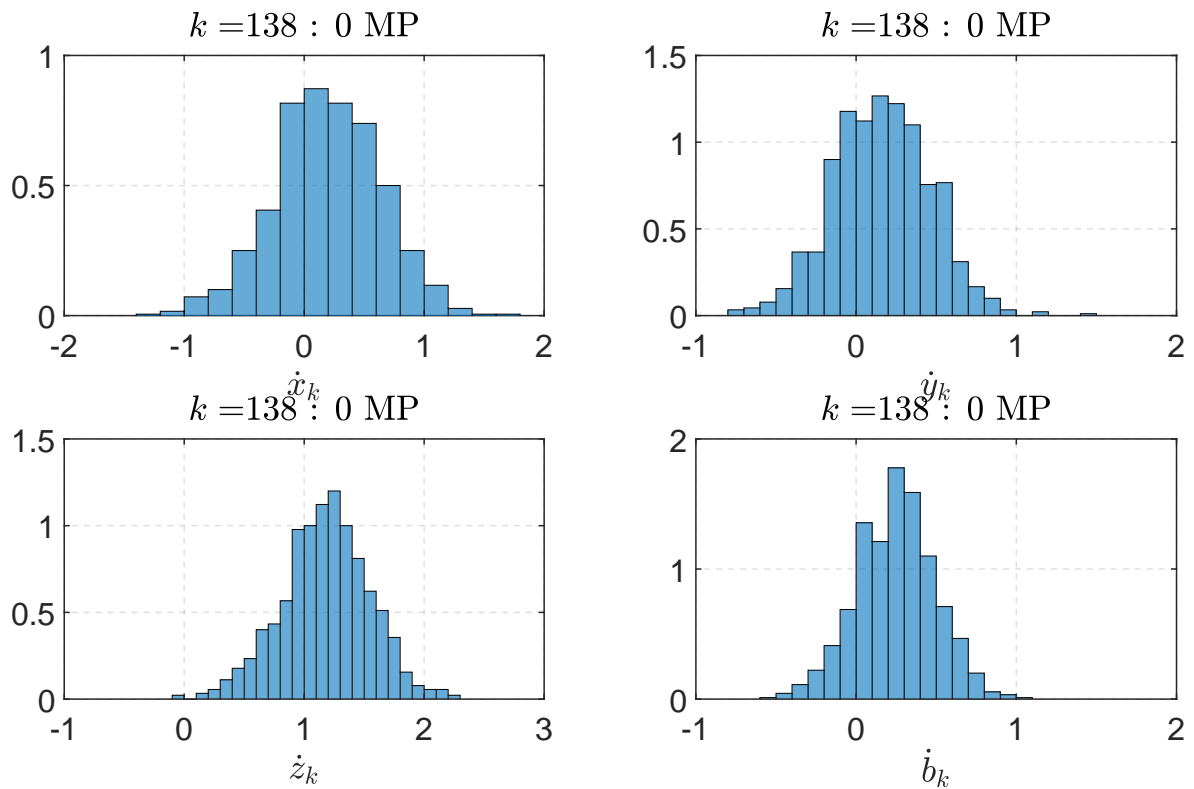
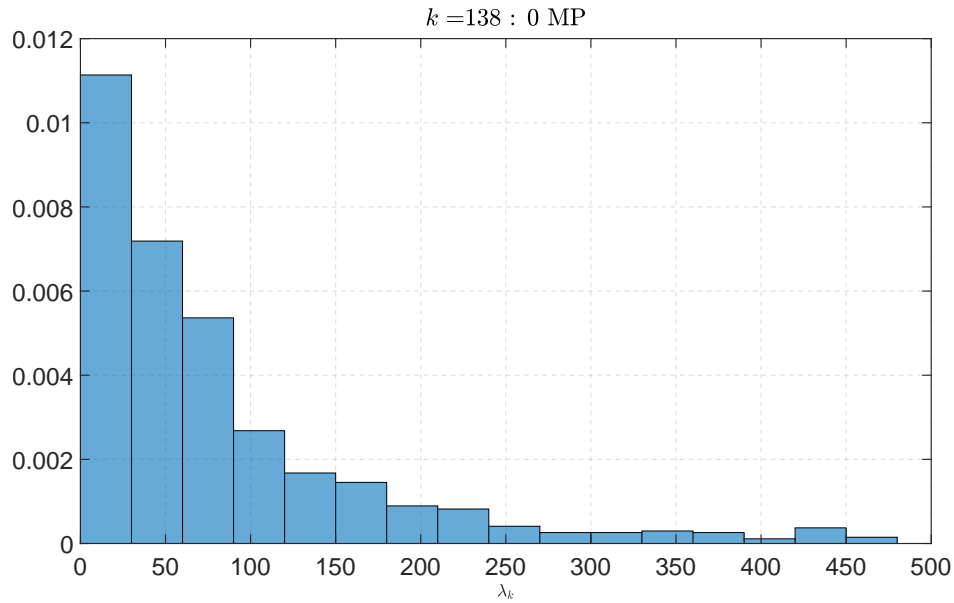


FIGURE 3.11 – Histogrammes du vecteur d'état estimés (vitesse et dérive d'horloge) en l'absence de multitrajet.

FIGURE 3.12 – Histogrammes de l'hyperparamètre λ_k estimés en l'absence de multitrajet.

3.4.1.2 Lois a posteriori en présence d'un multitrajet

Nous avons représenté dans la figure 3.13 les histogrammes estimés des biais pseudodistances pour tous les satellites, et dans la figure 3.14 les histogrammes estimés des biais pseudovitesses pour ces satellites. On remarque que le satellite affecté d'un multitrajet est correctement identifié (satellite numéro 5), alors que les distributions estimées pour les biais des autres satellites sont semblables à celles des figures 3.8 et 3.9 (centrées à faibles variances).

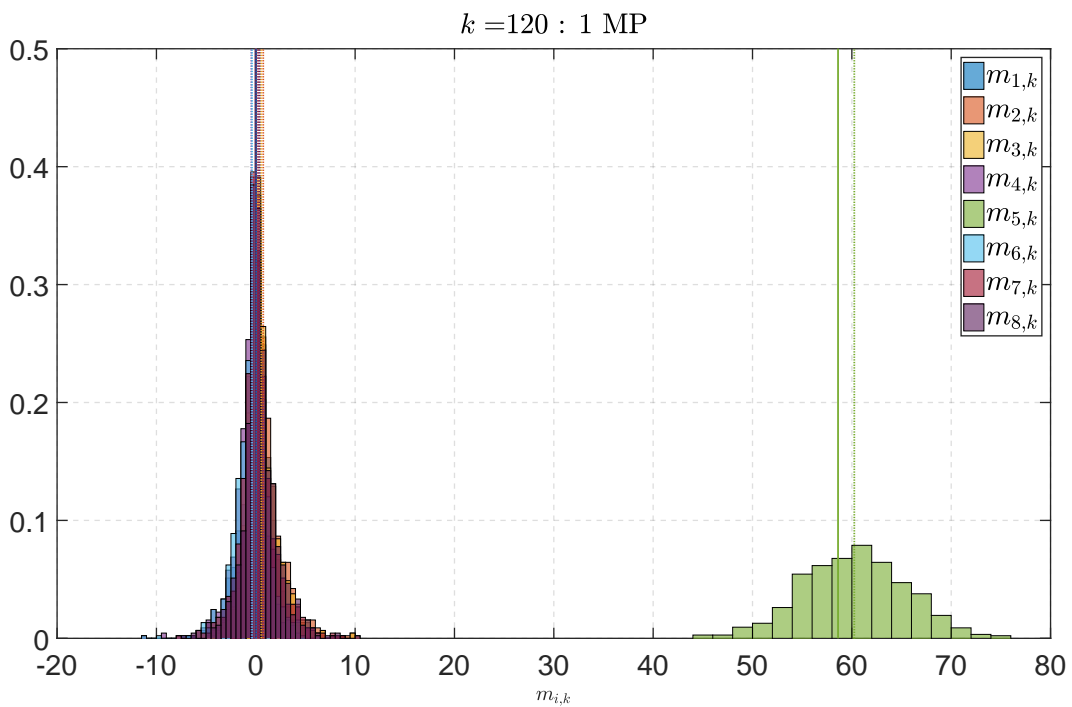


FIGURE 3.13 – Histogrammes des biais multitrajet estimés pour les pseudodistances de chaque satellite en présence d'un multitrajet, biais estimés (pointillés) et biais théoriques (traits pleins).

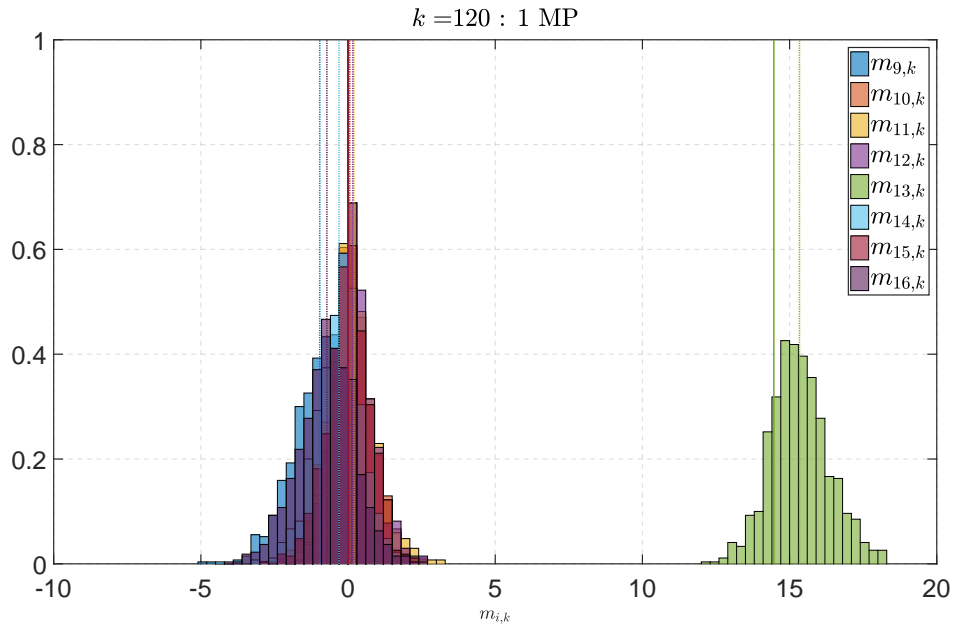


FIGURE 3.14 – Histogrammes des biais multitrajet estimés pour les pseudovitesse de chaque satellite en présence d'un multitrajet, biais estimés (pointillés) et biais théoriques (traits pleins).

Les histogrammes estimés du vecteur d'état (position \mathbf{r}_k et biais d'horloge b_k), sont donnés dans la figure 3.15 et les histogrammes estimés du vecteur d'état (vitesse \mathbf{v}_k et dérive d'horloge \dot{b}_k) sont donnés dans la figure 3.16. Ces distributions a posteriori sont semblables à celles obtenues en l'absence de multitrajets (figures 3.10 et 3.11), car ce sont des lois marginales qui ne dépendent pas de la valeur du vecteur biais.

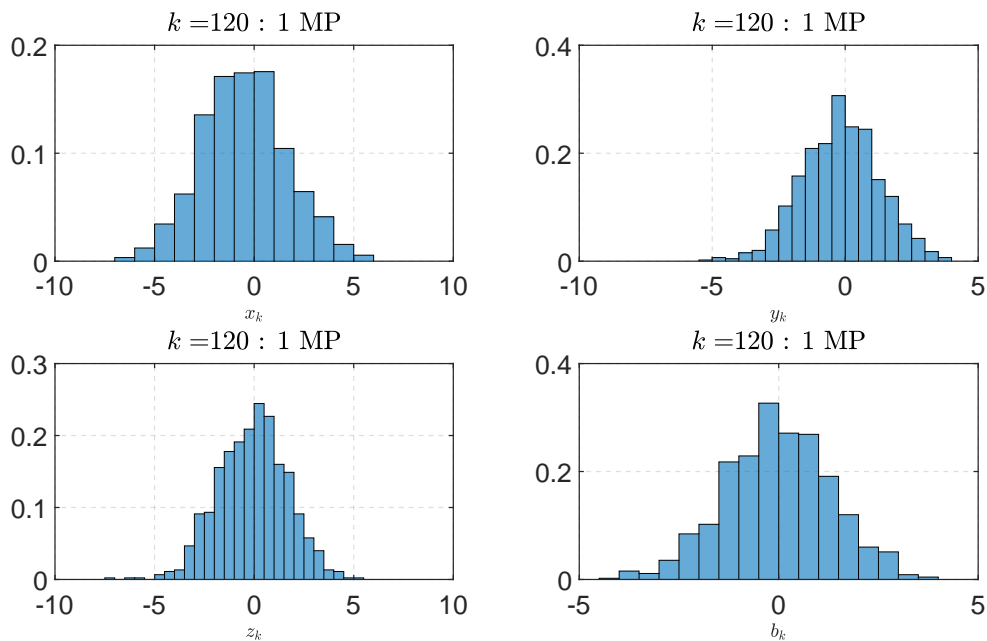


FIGURE 3.15 – Histogrammes du vecteur d'état estimés (position et biais d'horloge) en présence d'un multitrajet.

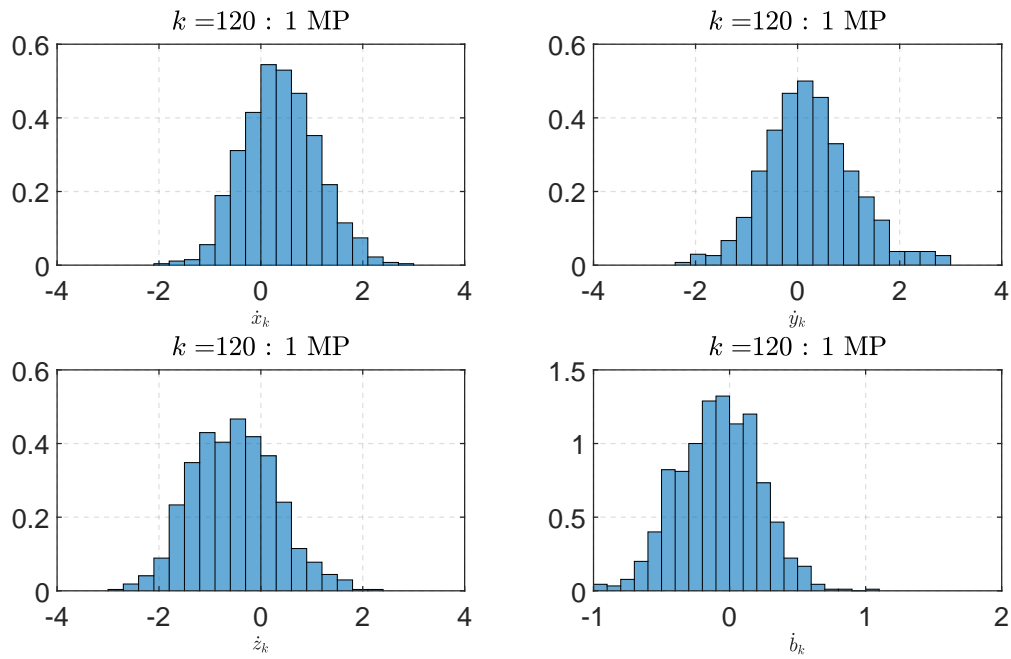


FIGURE 3.16 – Histogrammes du vecteur d'état estimés (vitesse et dérive d'horloge) en présence d'un multitrajet.

Finalement, la figure 3.17 donne l'histogramme estimé de l'hyperparamètre λ_k en présence d'un multitrajet. Cette fois-ci, la loi obtenue semble avoir une moyenne finie quelque soit le nombre d'échantillons, avec une moyenne proche de 1.

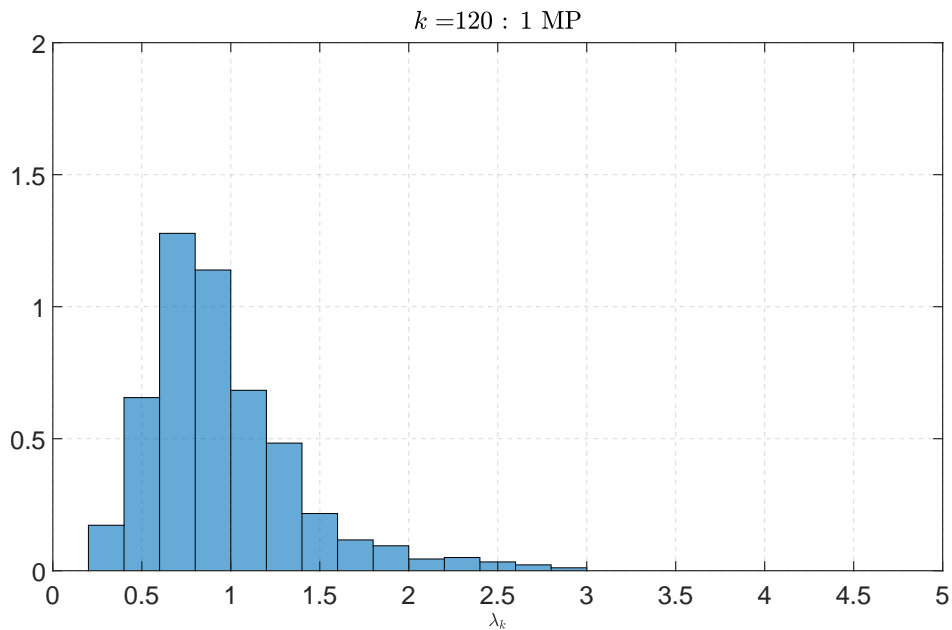


FIGURE 3.17 – Histogrammes de l'hyperparamètre λ_k estimés en présence d'un multitrajet.

3.4.1.3 Loïs a posteriori en présence de deux multitrajets

Nous avons représenté dans la figure 3.18 les histogrammes estimés des biais pseudodistances pour tous les satellites, et dans la figure 3.19 les histogrammes estimés des biais pseudovitesses pour tous ces satellites. On remarque que les satellites affectés d'un multitrajet sont correctement identifiés (satellites numéros 1 et 3), alors que les distributions estimées pour les biais des autres satellites sont semblables à celles des figures 3.8 et 3.9 (centrées à faibles variances).

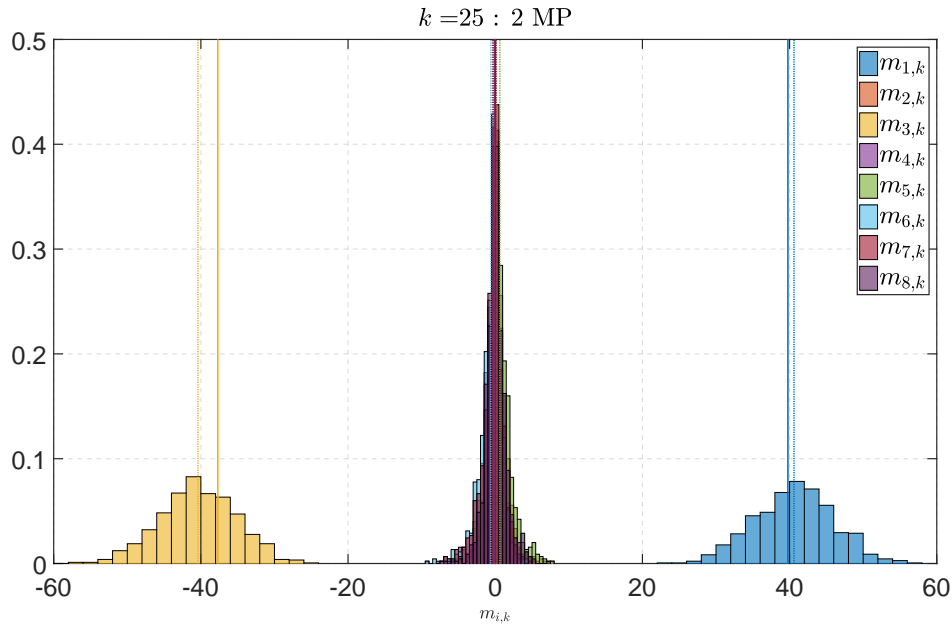


FIGURE 3.18 – Histogrammes des biais multitrajet estimés pour les pseudodistances de chaque satellite en présence de deux multitrajets, biais estimés (pointillés) et biais théoriques (traits pleins).

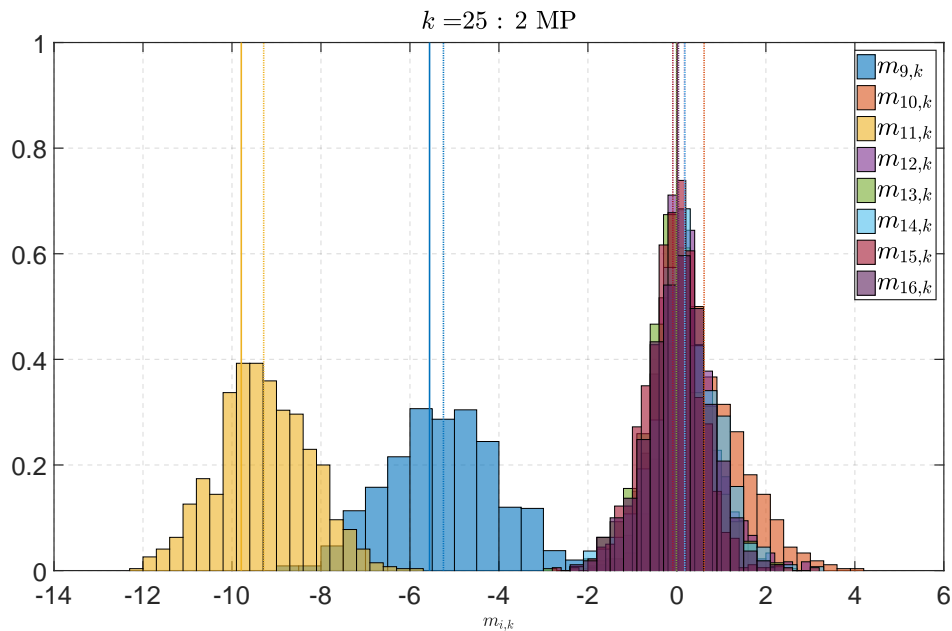


FIGURE 3.19 – Histogrammes des biais multitrajet estimés pour les pseudovitesses de chaque satellite en présence de deux multitrajets, biais estimés (pointillés) et biais théoriques (traits pleins).

La figure 3.20 donne les histogrammes estimés du vecteur d'état (position \mathbf{r}_k et biais d'horloge b_k), et la figure 3.21 les histogrammes estimés du vecteur d'état (vitesse \mathbf{v}_k et dérive d'horloge \dot{b}_k). Une fois de plus, ces distributions a posteriori sont semblables à celles

en l'absence de multitrajets (figures 3.10 et 3.11), car se sont des lois marginales et donc ne dépendent pas de la valeur du vecteur biais.

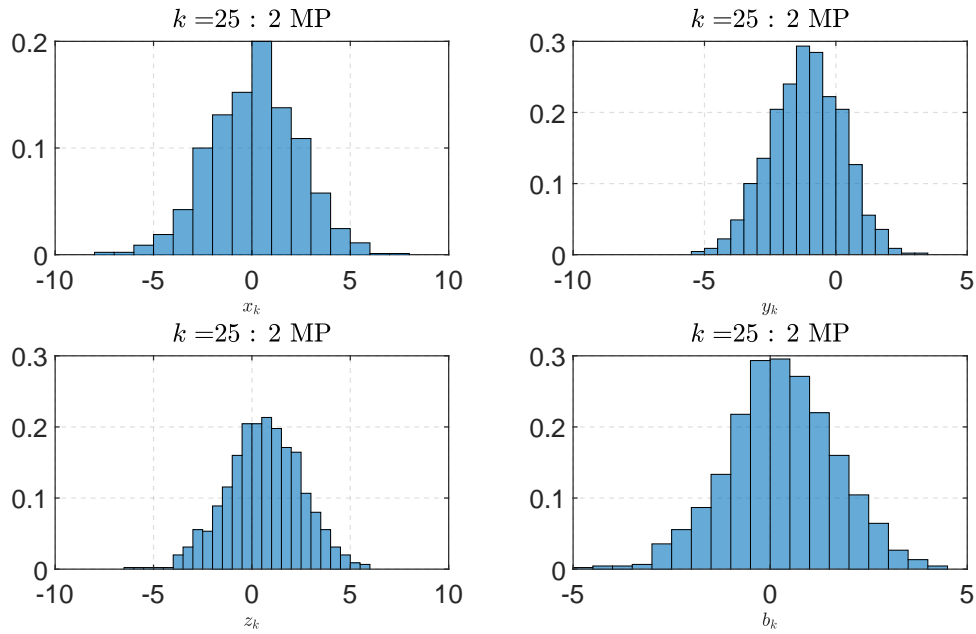


FIGURE 3.20 – Histogrammes du vecteur d'état estimés (position et biais d'horloge) en présence de deux multitrajets.

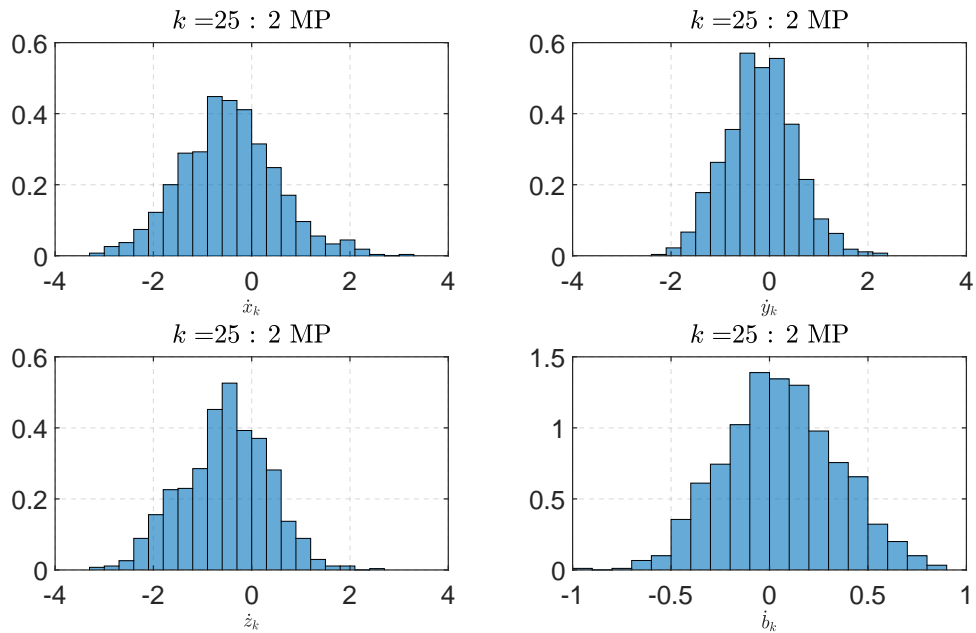
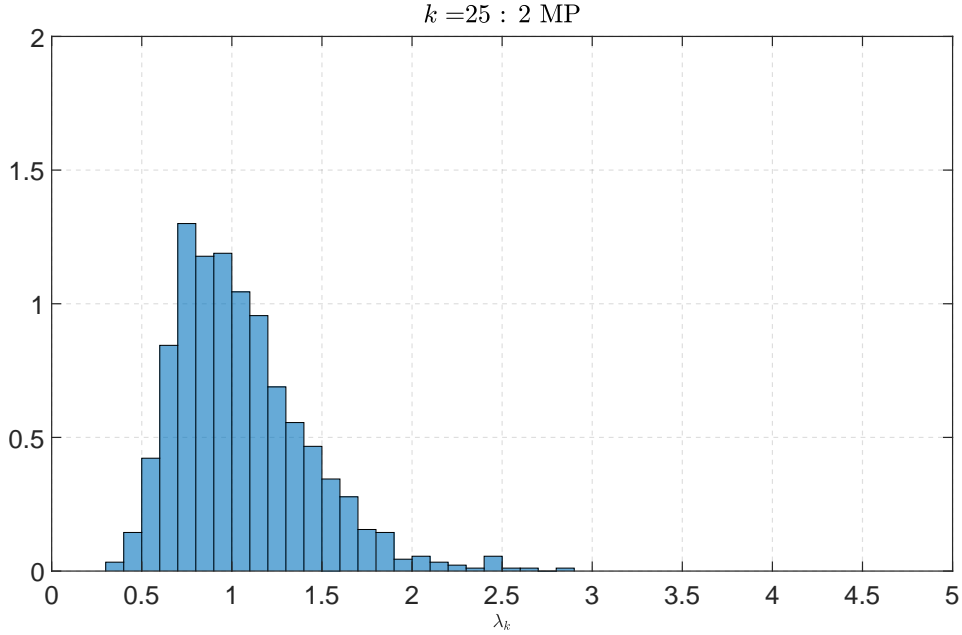


FIGURE 3.21 – Histogrammes du vecteur d'état estimés (vitesse et dérive d'horloge) en présence de deux multitrajets.

Finalement, la figure 3.22 représente l'histogramme estimé de l'hyperparamètre λ_k en présence de deux multitrajets. On remarque que celui-ci est semblable à celui en présence d'un seul multitrajet avec la même allure, la même moyenne et le même mode (autour de 1).

FIGURE 3.22 – Histogrammes de l'hyperparamètre λ_k estimés en présence de deux multitrajets.

3.4.1.4 Conclusion sur les données synthétiques

Concernant l'hyperparamètre λ_k , on conclut qu'une même valeur de λ_k peut correspondre à des configurations différentes. De plus, la valeur de λ_k ne dépend pas seulement du nombre de multitrajets, mais aussi de l'amplitude des composantes du vecteur \mathbf{m}_k . En effet, pour les instants $k = 80$ à $k = 100$, les amplitudes des biais multitrajets pseudodistances et pseudovitesse sont plus importantes que celles pour les instants $k = 30$ à $k = 70$, et donc la valeur de λ_k correspondante est plus faible (car le terme à minimiser est toujours $\lambda_k \|\mathbf{W}_k \mathbf{m}_k\|_1$ avec $\|\mathbf{W}_k \mathbf{m}_k\|_1$ plus important). A ce stade, nous voudrions souligner une différence entre le problème résolu dans le chapitre 2 et celui étudié dans ce chapitre. Le problème initial s'écrivait

$$\arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x} - \mathbf{m}\|_2^2 + \lambda_k \|\mathbf{W}_k \mathbf{m}\|_1 \quad (3.50)$$

pour lequel l'estimateur des biais multitrajets était effectuée après projection des mesures dans l'orthogonal de $\text{Vec}(\mathbf{H}_k)$, correction des mesures, et traitement des mesures corrigées par EKF. Dans ce chapitre, tous les paramètres sont traités au même étage (pas de projection, et étape de Kalman incluse dans la loi a priori sur \mathbf{x}_k), et le critère à minimiser est différent. En effet, le critère à minimiser équivalent au problème Bayésien proposé serait

$$\begin{aligned} & \arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x} - \mathbf{m}\|_{2, \mathbf{R}_k}^2 + \lambda_k \|\mathbf{W}_k \mathbf{m}\|_1 \\ & = \arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} \|\mathbf{R}_k^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x} - \mathbf{m})\|_2^2 + \lambda_k \|\mathbf{W}_k \mathbf{m}\|_1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

avec en plus un terme dépendant de la loi a priori sur \mathbf{x}_k . La matrice \mathbf{R}_k intervient donc différemment pour les deux problèmes et donc le paramètre λ_k n'est a priori pas le même pour les deux problèmes, ce qui explique pourquoi les valeurs de λ_k obtenues pour wLASSO et la méthode Bayésienne ne sont pas comparables telles quelles. Afin de conclure sur cet hyperparamètre, nous avons utilisé ces méthodes Bayésiennes sur les données réelles de la partie 2.4.3 dans la section suivante.

D'autre part, contrairement à la méthode wLASSO, la méthode proposée ne permet pas d'estimer quels satellites présentent un biais de mesure. En effet, le vecteur estimé n'aura jamais de composantes exactement nulles (seulement des valeurs très faibles). Afin d'ajouter une détection de présence de multitrajet, nous avons proposé une loi mixte Bernoulli-Laplace,

décrite dans l'annexe C.1. Bien que très efficace sur les données synthétiques, cette méthode s'est montrée moins convaincante sur les données réelles, ce qui explique pourquoi sa description a été laissée en annexe.

3.4.2 Données réelles

Nous avons appliqué la méthode Bayésienne au jeu de données utilisé dans la partie 2.4.3 et avons représenté dans la figure 3.23 les CDF estimées avec les différents algorithmes (wLASSO, wLASSO Bayésien et solution Ublox). On peut constater que la méthode Bayésienne fournit, d'un point de vue global, des résultats un peu moins satisfaisants que la méthode wLASSO (notamment pour l'erreur d'altitude), mais donne néanmoins de meilleurs résultats que l'EKF. Mais il faut noter que la méthode wLASSO nécessite de régler les hyperparamètres λ_k par validation croisée, ce qui nécessite de lancer l'algorithme, de nombreuses fois avec des valeurs de λ_k différentes (mais constantes sur toute la campagne de mesure), afin d'en déduire celle qui donne le moins d'erreur, contrairement à la méthode Bayésienne qui estime les paramètres et hyperparamètres conjointement au cours du temps, et permet donc d'avoir des valeurs de λ_k différentes au cours du temps.

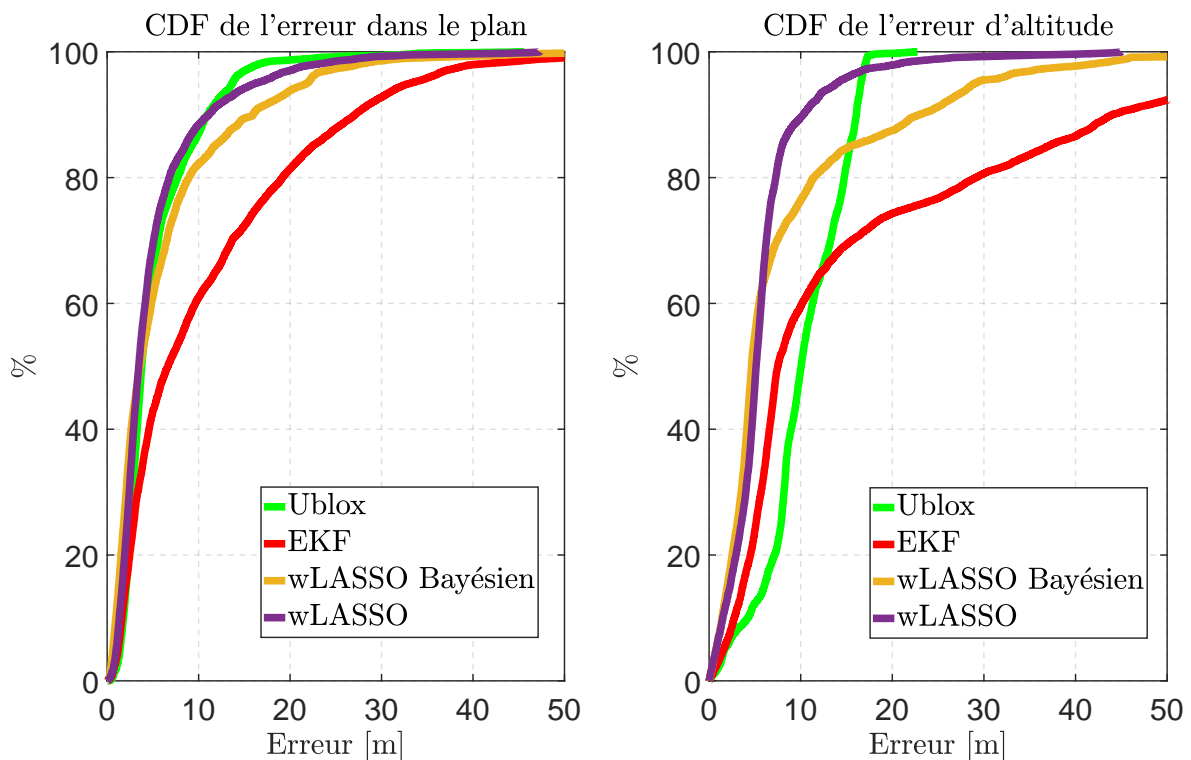


FIGURE 3.23 – CDFs estimées pour l'EKF, la méthode wLASSO avec $\lambda_k = 1$ et la méthode wLASSO Bayésienne avec estimation de λ_k .

3.5 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une méthode d'estimation Bayésienne permettant d'estimer les paramètres d'un modèle d'observation utilisé pour la navigation par satellite en présence d'éventuels biais multitrajets. Pour cela, nous avons utilisé un modèle classique de vraisemblance pour les mesures et une loi a priori découlant d'un filtre de Kalman pour le vecteur d'état. Pour le vecteur de biais multitrajet nous avons utilisé une loi a priori favorisant sa parcimonie, et nous avons utilisé une complétion afin de faciliter les différentes expressions des lois conditionnelles en introduisant un paramètre intermédiaire $\tau_{i,k}^2$ pour chaque paramètre $m_{i,k}$. Finalement, les hyperparamètres λ_k ont été munis d'une loi a priori non informative. Ces

différentes lois mènent à une loi a posteriori non-standard, et nous avons proposé d'estimer cette dernière à l'aide d'une méthode MCMC, et plus précisément d'un échantillonneur de Gibbs. Les paramètres générés par cet échantillonneur de Gibbs peuvent être utilisés pour calculer les estimateurs MMSE ou MAP des paramètres du modèle considéré.

La méthode proposée est une méthode puissante, car elle permet d'estimer non seulement les différents paramètres d'un modèle de navigation par satellites en présence d'éventuels multitrajets, mais aussi leurs distributions a posteriori. Ces distributions peuvent être utilisées pour en déduire des informations supplémentaires, comme par exemple des informations d'intégrité (incertitudes sur les mesures et niveaux de protection). La méthode proposée dans ce chapitre est inspirée d'une méthode Bayésienne LASSO présentée dans [Park et Casella \[2008\]](#) permettant d'obtenir une estimation conjointe des différents paramètres et hyperparamètres et d'éviter de fixer ces derniers par validation croisée. Cependant, cette méthode semble donner des résultats moins satisfaisants que ceux obtenus avec l'algorithme LASSO du deuxième chapitre, et donc nous n'avons pas continué dans cette direction. Dans le prochain chapitre, nous allons proposer un modèle différent du bruit de mesure qui est modélisé à l'aide d'un mélange de gaussiennes, avec l'objectif d'améliorer les résultats de positionnement obtenus avec l'algorithme LASSO.

Chapitre 4

Utilisation de mélanges de Gaussiennes pour la modélisation des erreurs GNSS

*« Mais dans mon monde, dans
mon monde
Ecoute mon nombril parler, dire
Y'a mille moi-même qui
m'inondent
Si je flotte, j'suis un sorcier »*

Jérôme Coudanne

Sommaire

| | | |
|------------|--|------------|
| 4.1 | Introduction | 104 |
| 4.2 | Estimation des erreurs et des modèles de mesures GNSS par mélange de Gaussiennes simple | 104 |
| 4.2.1 | Estimation des erreurs de mesure GNSS | 104 |
| 4.2.2 | Estimation des densités d'erreurs relatives GNSS par mélanges de Gaussiennes et algorithme EM | 105 |
| 4.2.3 | Résultats d'estimation | 105 |
| 4.2.4 | Estimation des densités d'erreurs | 110 |
| 4.3 | Estimation des erreurs et des modèles de mesures GNSS par mélanges de Gaussiennes et modèles de Markov cachés | 116 |
| 4.3.1 | Approche proposée | 116 |
| 4.3.2 | Estimation des densités d'erreur | 117 |
| 4.4 | Méthodes de filtrage | 120 |
| 4.4.1 | Filtrage par mélanges de Gaussiennes | 120 |
| 4.4.2 | Filtrage par chaînes de Markov | 120 |
| 4.5 | Expérimentations | 120 |
| 4.6 | Conclusion | 124 |

4.1 Introduction

Nous avons présenté dans les chapitres 2 et 3 une modélisation des erreurs GNSS dues aux multitrajets comme des biais additifs parcimonieux liés à la qualité de transmission et à la géométrie des satellites (C/N_0 et élévation) et d'un paramètre de régularisation fixé (méthodes du chapitre 2) ou à estimer (méthodes du chapitre 3) et d'un bruit blanc Gaussien centré et de variance connue (méthodes Weighted LASSO et Fused LASSO) ou inconnue (méthodes Weighted LASSO + Danish et Fused LASSO + Danish). Nous proposons dans cette partie d'estimer les erreurs de mesure pour les différents satellites lors de la campagne de mesure présentée à la partie 2.4.3, et d'estimer les densités (et donc les vraisemblances) correspondantes. Nous allons voir que ces densités peuvent s'exprimer sous la forme de mélanges de Gaussiennes, comme cela a déjà été observé dans la littérature [Caron et al. \[2007\]](#); [Viandier et al. \[2008\]](#) ou [Rabaoui et al. \[2012\]](#).

4.2 Estimation des erreurs et des modèles de mesures GNSS par mélanges de Gaussiennes simples

Le modèle de mesures présenté dans le chapitre 1 s'écrivait (1.92) (à la page 37)

$$\mathbf{z}_k = h_k(\boldsymbol{\xi}_k) + \mathbf{n}_k. \quad (4.1)$$

où h_k est la somme de la fonction qui relie le vecteur d'état aux mesures (distances aux satellites pour les pseudodistances, vitesses radiales pour les pseudovitesse) et des différents modèles d'erreurs, et \mathbf{n}_k est le bruit de mesures GNSS. Le but de cette section est d'estimer la loi des erreurs de mesures \mathbf{n}_k à l'aide de mélanges de Gaussiennes et d'utiliser cette loi pour développer un algorithme de positionnement par satellites.

4.2.1 Estimation des erreurs de mesure GNSS

L'idée est tout d'abord d'utiliser un récepteur de référence haute précision (la même référence que dans la partie expérimentation du chapitre 2), afin d'estimer le vecteur $\boldsymbol{\xi}_k$ et de construire le résidu

$$\boldsymbol{\nu}_k = \mathbf{z}_k - h_k(\hat{\boldsymbol{\xi}}_k) \quad (4.2)$$

et d'estimer sa loi de probabilité. Mais, même si le récepteur nous fournit une estimation précise de la vitesse et de la position du récepteur contenus dans le vecteur $\hat{\boldsymbol{\xi}}_k$, il ne nous fournit aucune information sur le biais et la dérive d'horloge du récepteur qui nous fournit les mesures (en effet, l'horloge du récepteur utilisé comme référence et celle du récepteur dont on veut connaître les erreurs sont totalement indépendantes). Nous allons donc faire l'hypothèse qu'à un instant k donné, le satellite avec la plus haute élévation ne souffre d'aucune erreur. En notant $s_{0,k}$ ce satellite d'élévation maximale à l'instant k , et en reprenant les équations (1.55) et (1.56), on obtient

$$\hat{b}_k = \rho_{s_{0,k}} - \|\mathbf{r}_{s_{0,k}} - \mathbf{r}\|_2 - \hat{\varepsilon}_{s_{0,k}} \quad (4.3)$$

$$= b_k + n_{s_{0,k}} \quad (4.4)$$

$$\hat{b}_k = \dot{\rho}_{s_{0,k}} - (\mathbf{v}_{s_{0,k}} - \mathbf{v})^T \mathbf{a}_{s_{0,k}} - \hat{\varepsilon}_{s_{0,k}} \quad (4.5)$$

$$= \dot{b}_k + n_{s_k + s_{0,k}} \quad (4.6)$$

où $\hat{\varepsilon}_{s_{0,k}}$ et $\hat{\varepsilon}_{s_{0,k}}$ désignent les modèles d'erreurs respectivement sur la pseudodistance et la pseudovitesse du satellite $s_{0,k}$ à l'instant k et $n_{s_{0,k}}$ $n_{s_k + s_{0,k}}$ désignent respectivement le bruit de mesure sur la pseudodistance et la pseudovitesse du satellite $s_{0,k}$ à l'instant k . Cette

estimation permet alors d'obtenir par simple différence pour chaque satellite i

$$\nu_{i,k} = \rho_{i,k} - \|\mathbf{r}_{i,k} - \mathbf{r}\|_2 - \hat{\varepsilon}_{i,k} - \hat{b}_k \quad (4.7)$$

$$= n_{i,k} - n_{s_0,k} \quad (4.8)$$

$$\nu_{s_k+i,k} = \dot{\rho}_{i,k} - (\mathbf{v}_{i,k} - \mathbf{v})^T \mathbf{a}_{i,k} - \hat{\varepsilon}_{i,k} - \hat{b}_k \quad (4.9)$$

$$= n_{s_k+i,k} - n_{s_k+s_0,k} \quad (4.10)$$

où $\hat{\varepsilon}_{i,k}$ et $\hat{\varepsilon}_{i,k}$ désignent les modèles d'erreurs respectivement sur la pseudodistance et la pseudovitesse du satellite i à l'instant k et $n_{i,k}$ $n_{s_k+i,k}$ désignent respectivement le bruit de mesure sur la pseudodistance et la pseudovitesse du satellite i à l'instant k . Nous allons donc dans un premier temps estimer les lois de $\nu_{i,k}$ et $\nu_{s_k+i,k}$ et étudier comment on peut en déduire la loi des erreurs dues aux signaux multitrajets.

4.2.2 Estimation des densités d'erreurs relatives GNSS par mélanges de Gaussiennes et algorithme EM

Dans cette partie, on cherche la densité de probabilité du vecteur

$$\boldsymbol{\nu}_i = \nu_{i,1:K_i}, \quad i = 1, \dots, 2s_k \quad (4.11)$$

où K_i désigne le nombre le nombre de mesures disponibles pour le satellite i durant toute la trajectoire considérée. Notons que le paramètre K_i varie d'un satellite à l'autre en fonction des différents phénomènes de masquage. Comme précisé précédemment, on suppose que les composantes du vecteur $\boldsymbol{\nu}_i$ sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) et que leur loi est un mélange de M Gaussiennes (on suppose que le nombre de Gaussiennes pour tous les satellites est le même sans perte de généralités), i.e.,

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\nu}_i) &= \prod_{k=1}^{K_i} p(\nu_{i,k}) \\ &= \prod_{k=1}^{K_i} \sum_{j=1}^M \alpha_{i,j} f_{\mathcal{N}}(\nu_{i,k}; \mu_{i,j}, \sigma_{i,j}^2) \end{aligned} \quad (4.12)$$

où $\alpha_{i,j}$ désigne les proportions du mélange (avec $\alpha_{i,j} \in [0, 1]$ et $\sum_{j=1}^M \alpha_{i,j} = 1$) et $f_{\mathcal{N}}(\nu_{i,k}; \mu_{i,j}, \sigma_{i,j}^2)$ désigne la densité d'une loi normale de moyenne $\mu_{i,j}$ et de variance $\sigma_{i,j}^2$ pour la variable $\nu_{i,k}$ (N.B., la moyenne et la variance diffèrent pour chaque satellite i), i.e.,

$$f_{\mathcal{N}}(\nu_{i,k}; \mu_{i,j}, \sigma_{i,j}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{i,j}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{i,j}^2}(\nu_{i,k} - \mu_{i,j})^2\right). \quad (4.13)$$

Le vecteur des paramètres à estimer pour déterminer le mélange est alors

$$\boldsymbol{\Theta}_i = \{\alpha_{i,j}, \mu_{i,j}, \sigma_{i,j}\}_{j=1,\dots,M} \quad (4.14)$$

Une manière classique de résoudre ce problème est d'utiliser un algorithme *Expectation Maximization* (EM) [Dempster et al. \[1977\]](#); [\[Bishop, 2006, Chap. 9\]](#), comme détaillé dans l'annexe D.1.1.

4.2.3 Résultats d'estimation

Nous avons testés les deux méthodes présentées précédemment (estimations des erreurs et de leurs densités) pour les mesures GNSS de la campagne de mesures étudiée dans la partie 2.4.3 p.60. Nous allons représenter pour chaque satellite les histogrammes des erreurs de pseudodistances et de pseudovitesse, ainsi que les densités estimées initialement et après

algorithme EM. Pour initialiser l'algorithme EM, nous utilisons la fonction Matlab `kmeans` qui permet de séparer un vecteur en un nombre fixé de classes par partitionnement en k -moyennes [Bishop, 2006, Chap. 9] (l'algorithme cherche à partitionner les K_i points en M ensembles tout en minimisant la distance entre les points à l'intérieur de chaque partition). Dans la suite, nous choisissons $M = 6$, soit 6 classes initiales et 6 mélanges de Gaussiennes par mesure. Tout au long de la campagne, les satellites 5, 12, 13, 15, 17, 18, 22, 24, 28 sont observés, et le satellite 15 a une élévation maximale et sert donc de référence pour estimer les erreurs (nous ne pourrions pas estimer sa densité). Pour les autres satellites, les résultats sont donnés respectivement dans les figures 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8. Comme on peut l'observer, dans chacune des figures, il y a une bonne adéquation entre l'histogramme des erreurs et le mélange de gaussiennes estimé par l'algorithme EM, ce qui confirme l'intérêt de la méthode proposée.

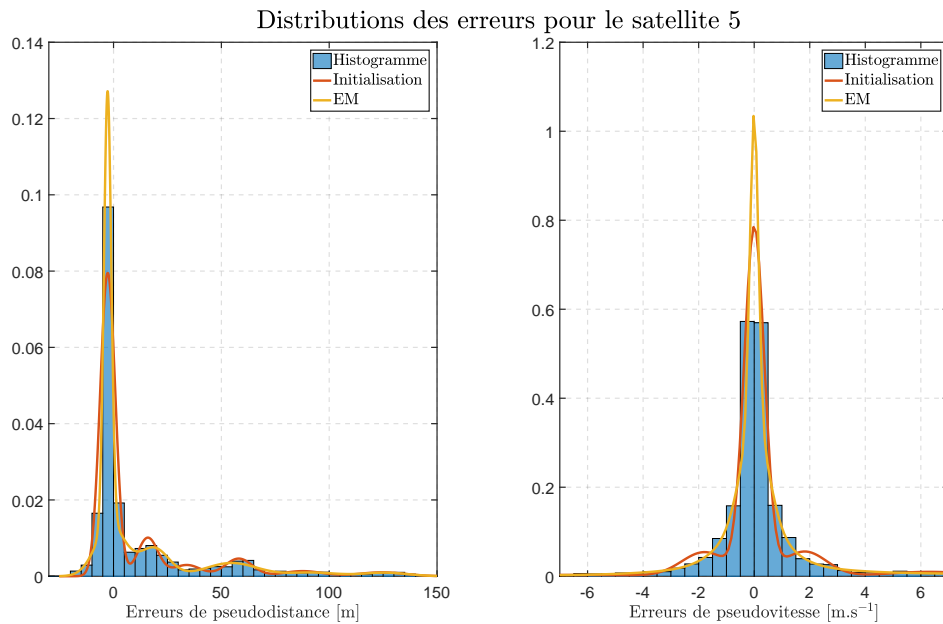


FIGURE 4.1 – Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 5.

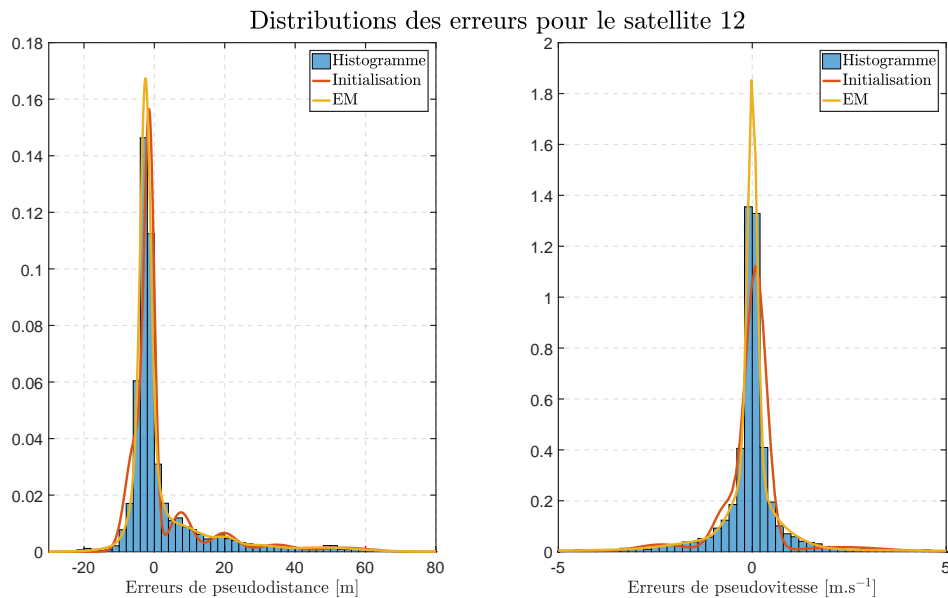


FIGURE 4.2 – Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 12.

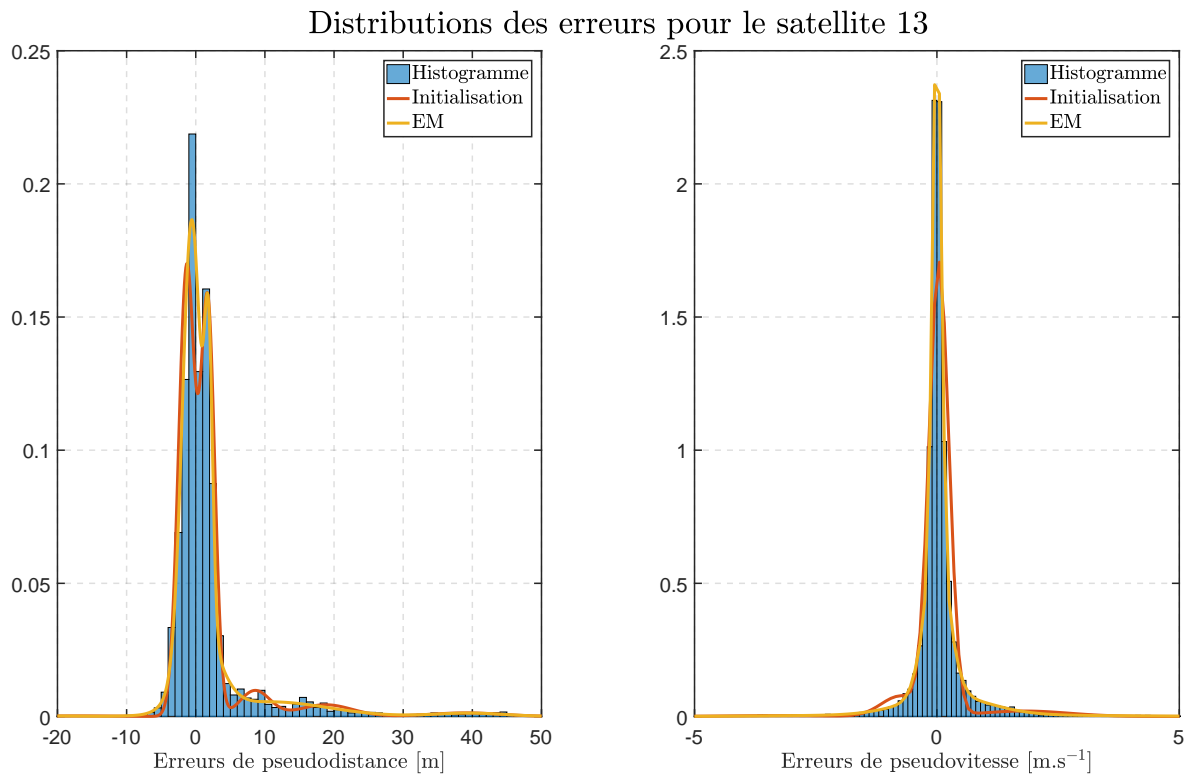


FIGURE 4.3 – Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 13.

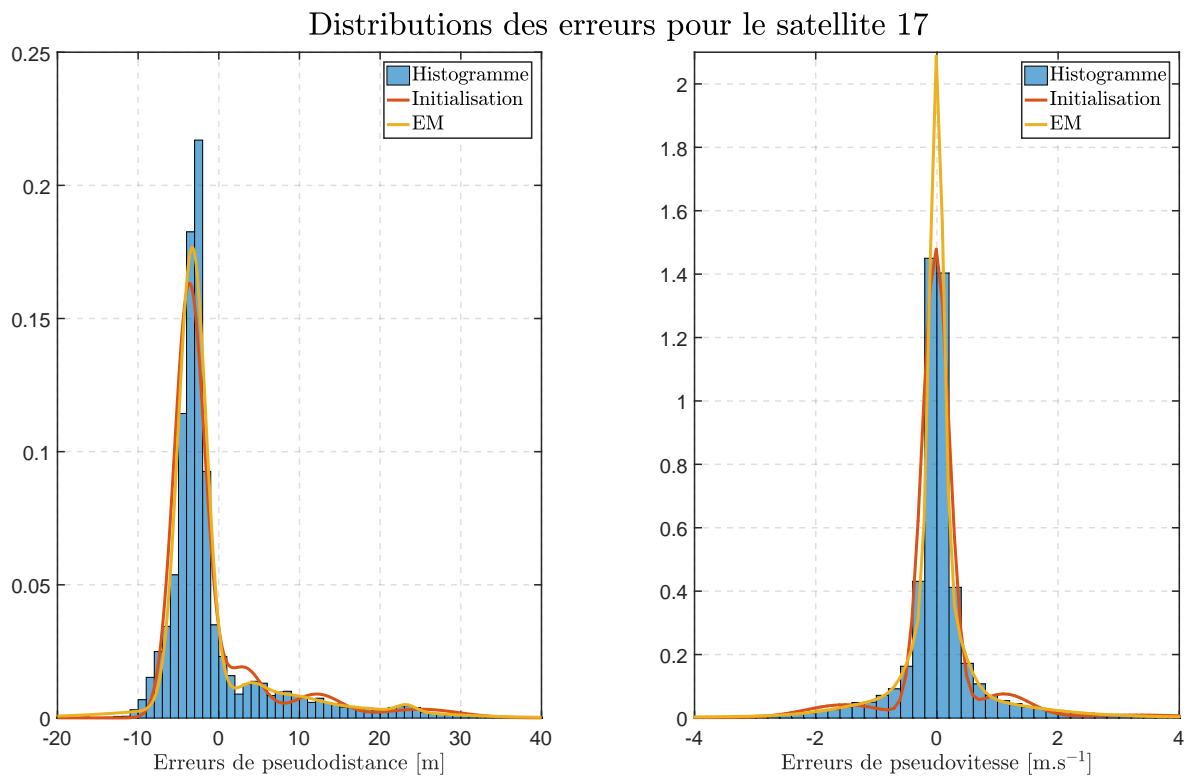


FIGURE 4.4 – Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 17.

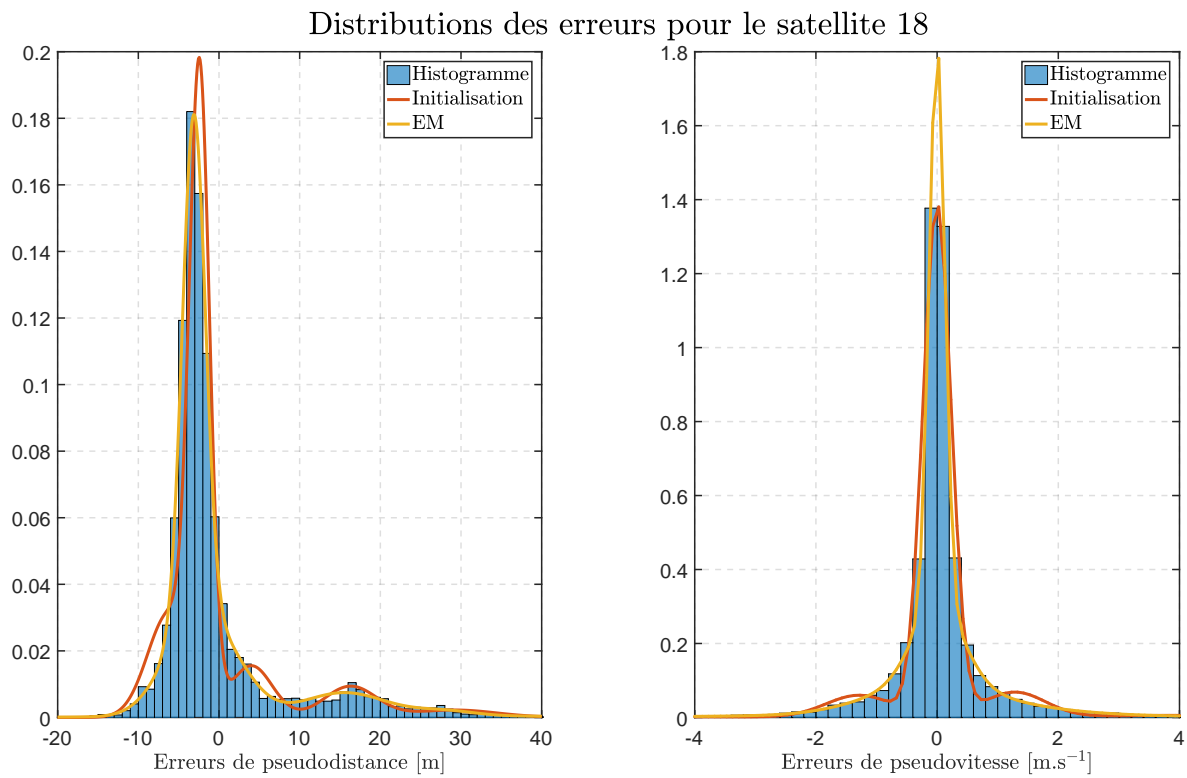


FIGURE 4.5 – Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 18.

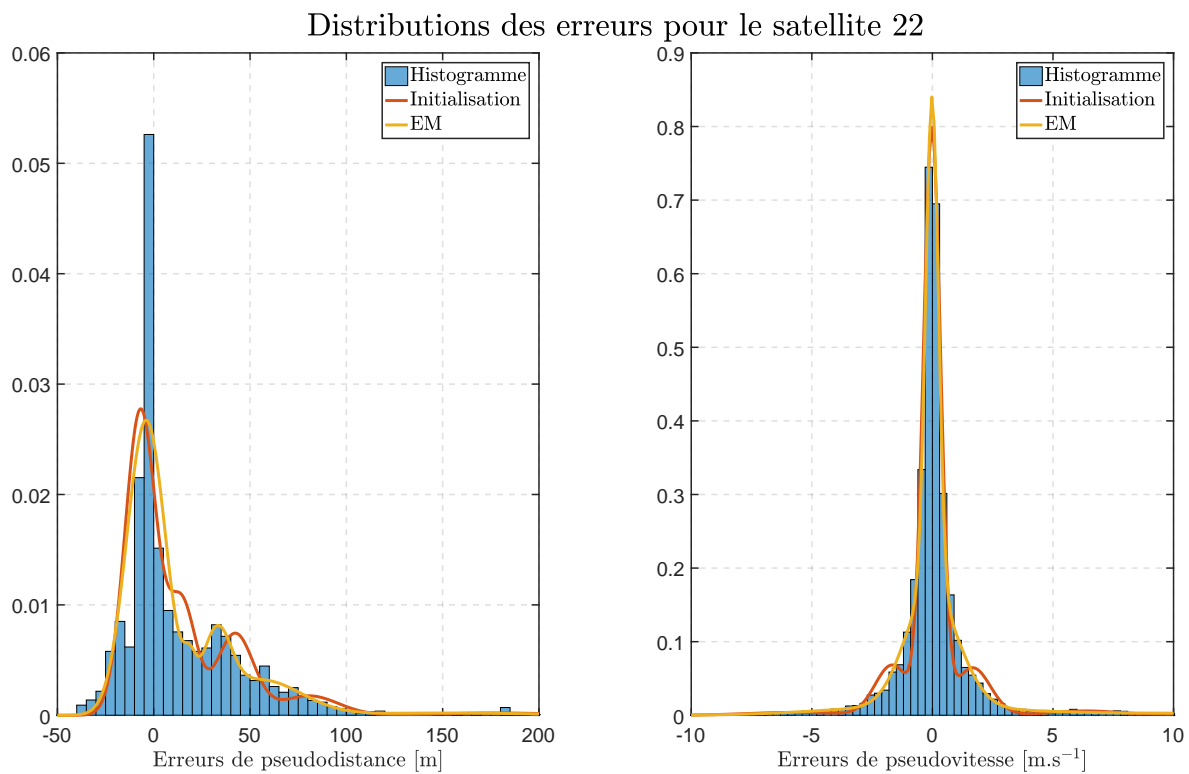


FIGURE 4.6 – Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 22.

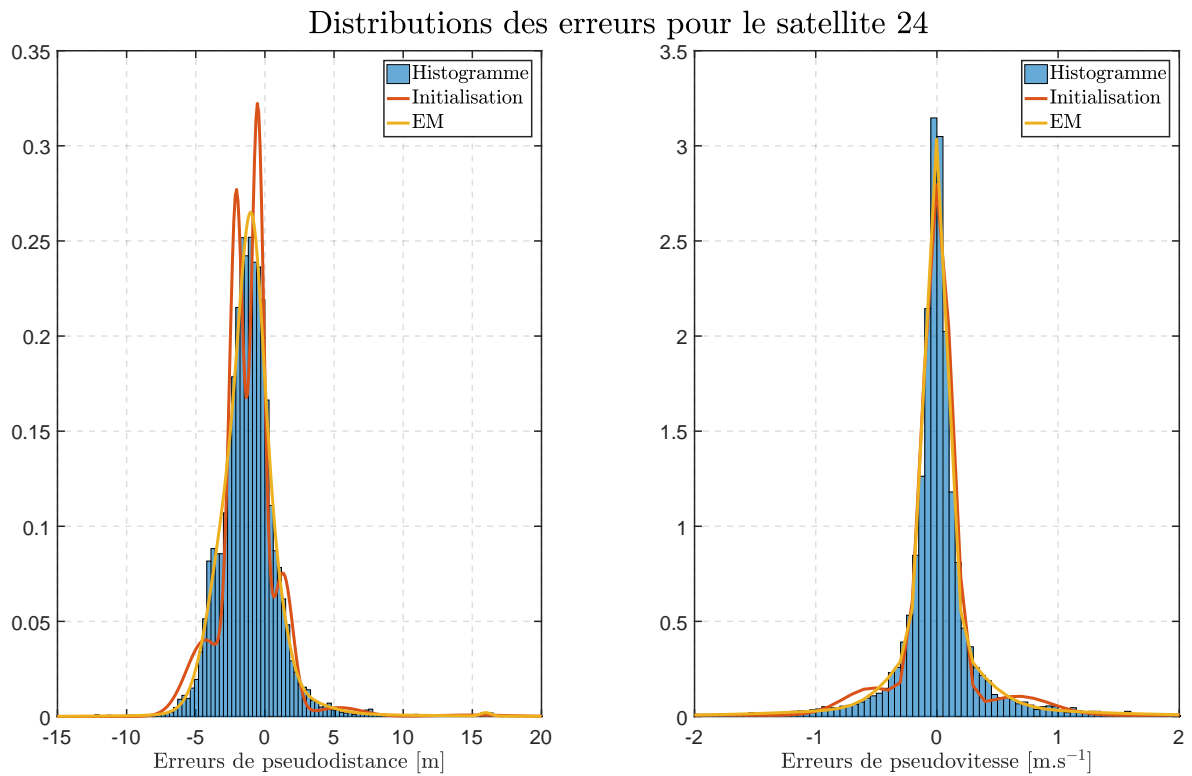


FIGURE 4.7 – Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 24.

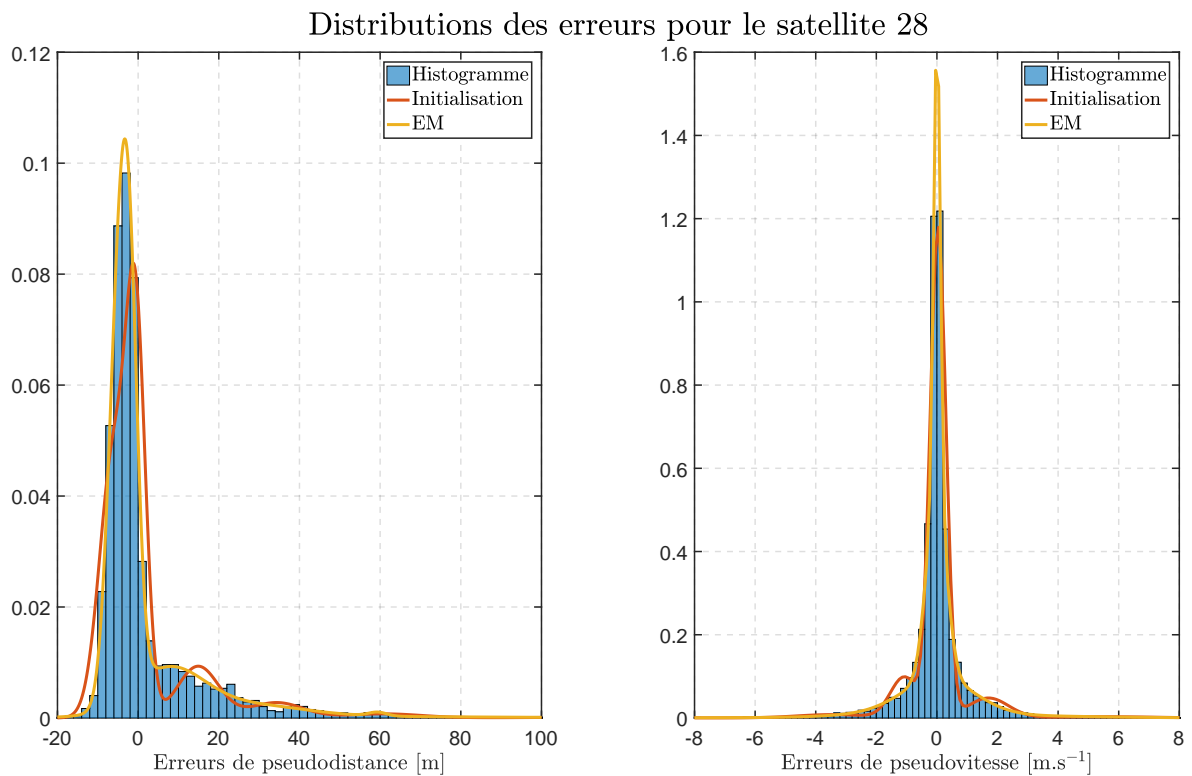


FIGURE 4.8 – Histogramme et densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 28.

4.2.4 Estimation des densités d'erreurs

Les densités estimées à la partie précédente sont celles des vecteurs

$$\nu_{i,k} = n_{i,k} - n_{s_{0,k}}, \quad i = 1, \dots, 2s_k. \quad (4.15)$$

La densité de bruit de la i -ème mesure s'écrit

$$n_{i,k} = \nu_{i,k} + n_{s_{0,k}}, \quad i = 1, \dots, 2s_k. \quad (4.16)$$

Comme le satellite $s_{0,k}$ est supposé avoir un fonctionnement nominal tout au long de la campagne de mesure, nous allons supposer que sa loi peut être définie par une loi normale, i.e.,

$$n_{s_{0,k}} \sim \mathcal{N}(n_{s_{0,k}}; 0, \sigma_p^2) \quad (4.17)$$

$$n_{s_{0,k}+s_k} \sim \mathcal{N}(n_{s_{0,k}}; 0, \sigma_r^2) \quad (4.18)$$

où σ_p^2 et σ_r^2 sont les valeurs d'UERE qui ont été données dans les équations (1.76) et (1.77). On en déduit alors que $n_{i,k}$ et $n_{i+s_k,k}$ sont des mélanges de gaussiennes, i.e.,

$$\begin{aligned} n_{i,k} &\sim \sum_{j=1}^M \alpha_{i,j} f_{\mathcal{N}}(n_{i,k}; \mu_{i,j}, \sigma_{i,j}^2 + \sigma_p^2) \\ n_{i+s_k,k} &\sim \sum_{j=1}^M \pi_{i+s_k,j} f_{\mathcal{N}}(n_{i+s_k,k}; \mu_{i+s_k,j}, \sigma_{i+s_k,j}^2 + \sigma_r^2), \quad i = 1, \dots, s_{0,k}-1, s_{0,k}+1, \dots, s_k. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Les densités d'erreurs finalement estimées sont représentées dans les figures 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16 et 4.17 et les valeurs estimées sont résumées dans le tableau 4.1 pour les erreurs de pseudodistance et dans le tableau 4.2 pour les erreurs de pseudovitesse. Les densités ainsi estimées sont en accord avec ce que l'on peut trouver dans la littérature GNSS : les mesures de pseudodistances sont peu fiables et peuvent contenir de large valeurs, alors que les distributions des mesures de Doppler semblent centrées avec des variances plus faibles. Dans chacune de ces figures, la densité relative de $\nu_{i,k}$ est représentée en bleu tandis que la densité absolue de $n_{i,k}$ est représentée en rouge.

| | | | | | | | | | |
|------------|---|---|---|----|--|---|---|---|---|
| | 5 | 12 | 13 | 15 | 17 | 18 | 22 | 24 | 28 |
| α_i | 0.2289 0.1052 0.4878 0.0242 0.1267 0.0272 | 0.4732 0.0396 0.0197 0.2167 0.0209 0.2298 | 0.1469 0.00162 0.1141 0.2000 0.5120 0.0018 | 1 | 0.0269 0.7525 0.0045 0.1773 0.0310 0.0078 | 0.0907 0.1955 0.00290 0.1283 0.0142 0.5423 | 0.6689 0.1149 0.0220 0.0229 0.1691 0.0022 | 0; 1168 0.0226 0.0957 0.0017 0.3771 0.3860 | 0.3213 0.3883 0.0038 0.0735 0.1823 0.0308 |
| μ_i | -1.4250 54.7419 -2.7582 125.8433 18.6951 91.1151 | -2.5239 47.2752 29.7766 -2.5911 20.8742 4.4626 | 1.8567 39.5593 10.8330 0.6058 -0.6157 -20.2213 | 0 | 8.5920 -3.2902 57; 1935 6.5384 3.8440 23.2576 | 15.5246 -3.8013 22.9353 0.6887 27.9467 -3.1156 | -3.9686 32.7403 18.6020 152.1645 55.4108 -118.9853 | -0.113 2.1889 0.6971 15.9696 -0.9179 -2.3401 | -2.1701 -5.0660 59.3807 26.8124 7.4109 41.1540 |
| σ_i | 8.4803 13.0771 5.2831 11.6240 8.4969 12.5099 | 5.2014 11.7656 6.7659 5.8658 5.8044 10.4121 | 5.0345 7.1731 9.6759 5.7223 5.1694 6.3211 | 5 | 5.9689 5.2937 10.0216 14.0773 5.3287 5.1411 | 7.1802 6.1920 26.0935 6.1381 6.2212 5.1991 | 11.1884 8.8461 5.9839 45.1138 21.7798 16.8235 | 5.7514 9.3864 5.0894 5.0141 5.0761 5.2127 | 5.4416 5.5986 5.4712 14.7214 10.1330 43.8638 |

TABLEAU 4.1 – Mélanges de Gaussiennes estimés pour les erreurs de pseudodistances de chaque satellite.

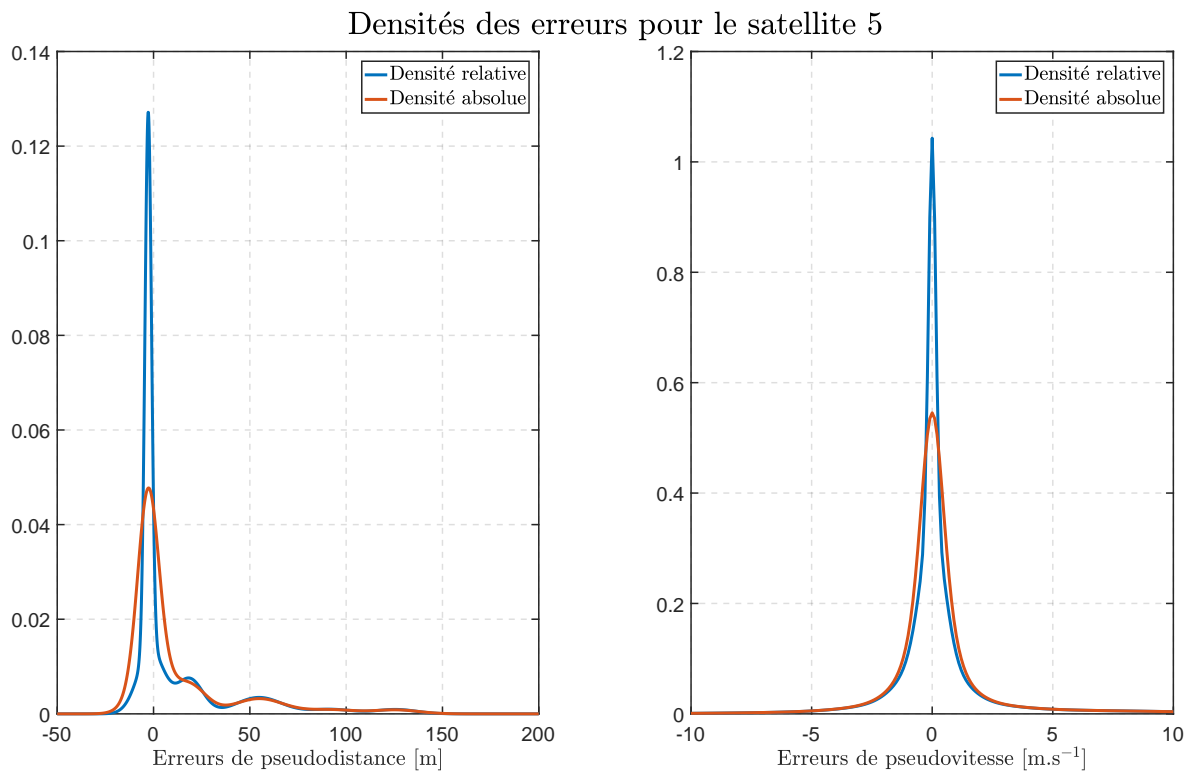


FIGURE 4.9 – Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 5.

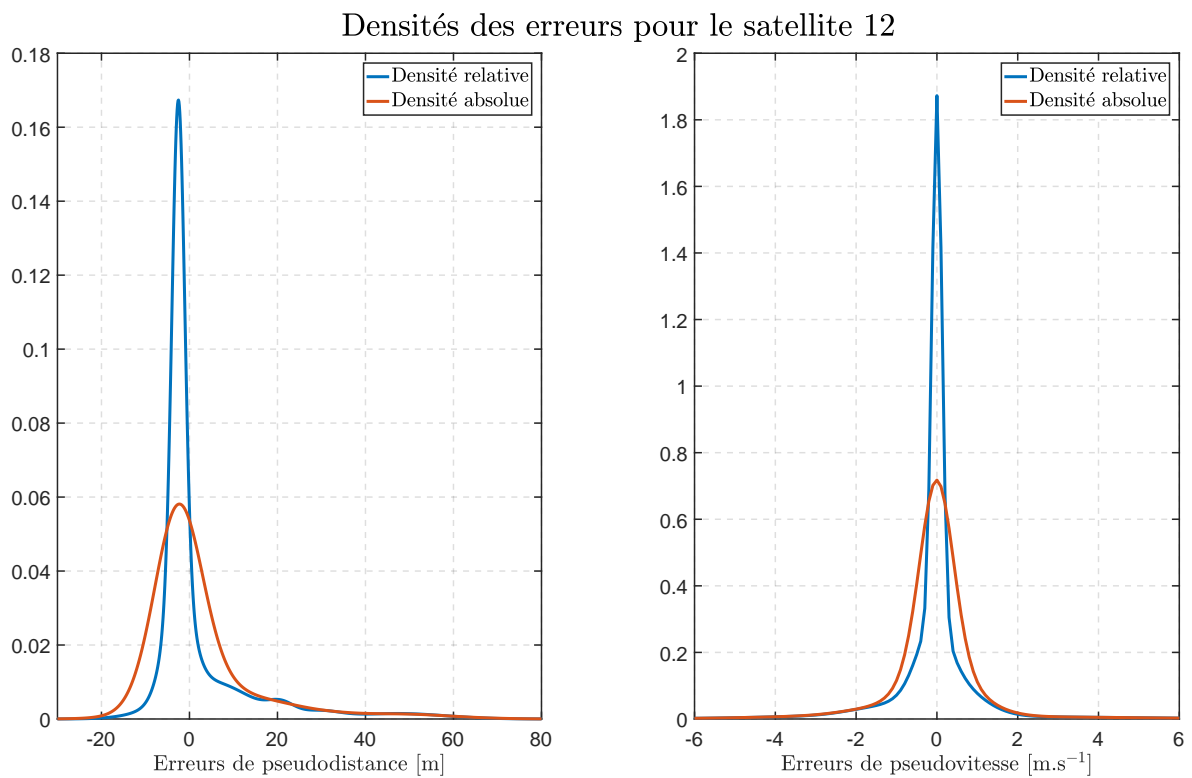


FIGURE 4.10 – Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 12.

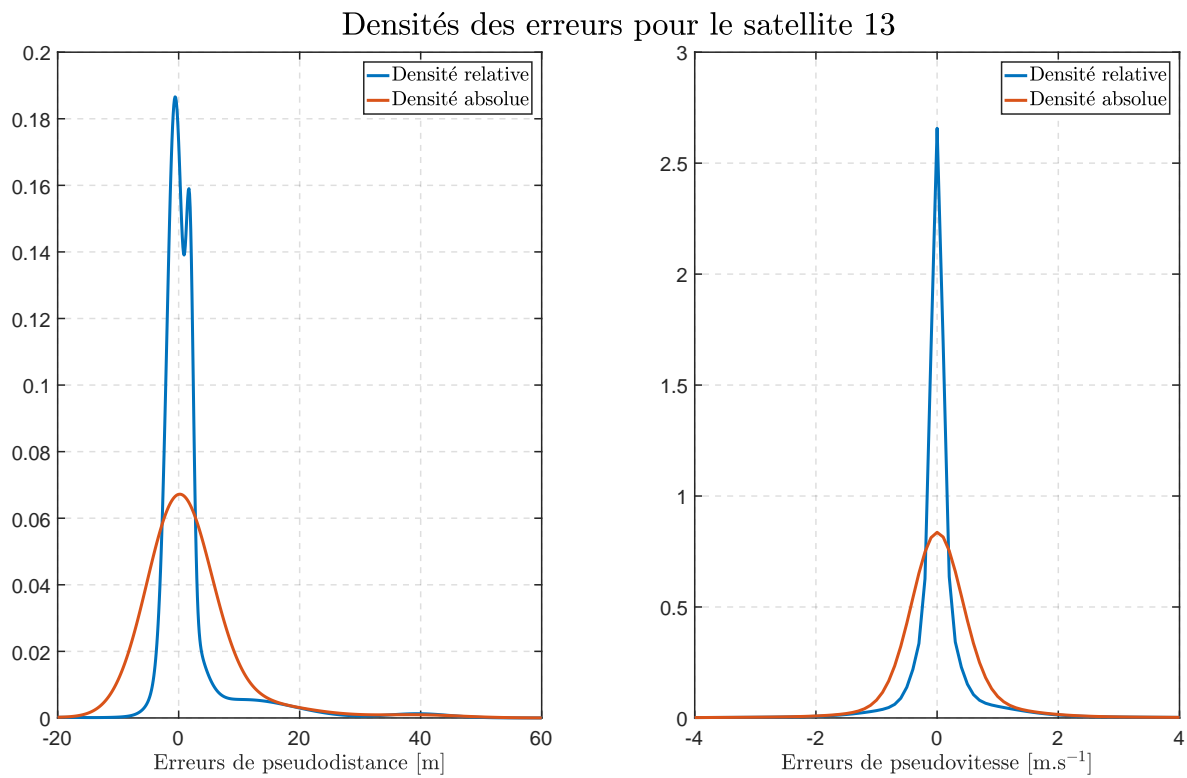


FIGURE 4.11 – Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 13.

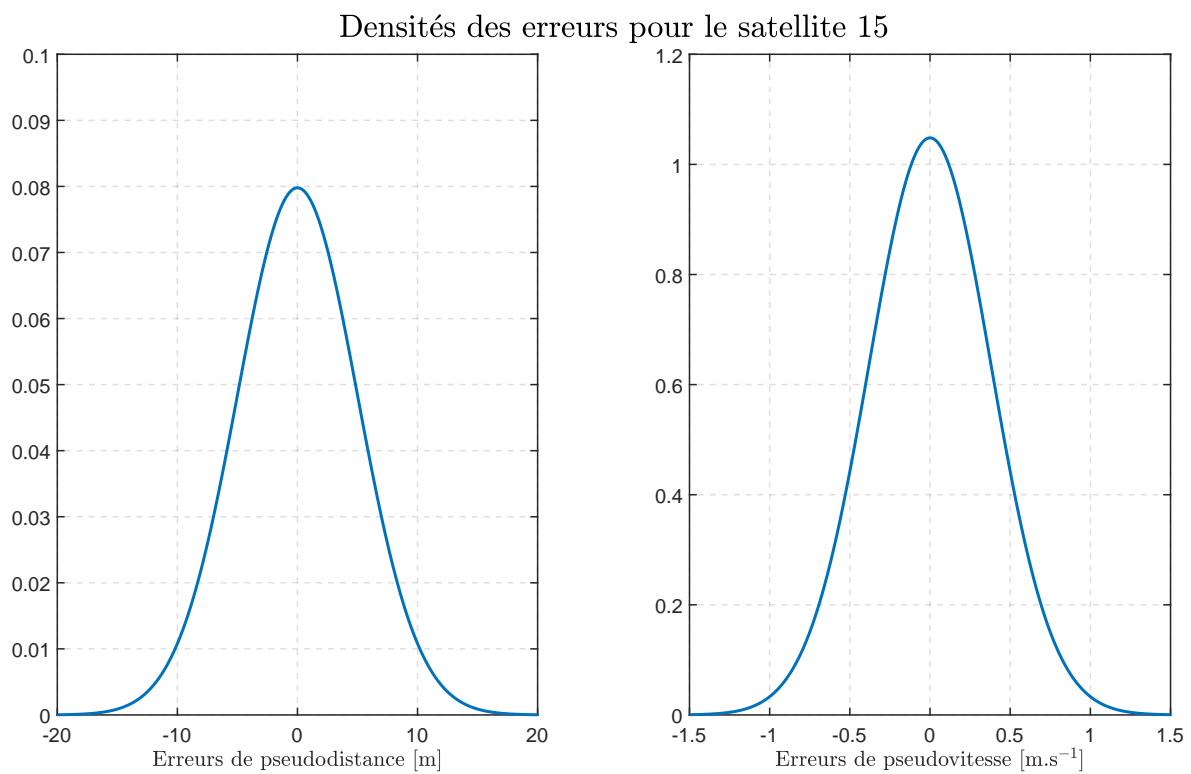


FIGURE 4.12 – Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 15.

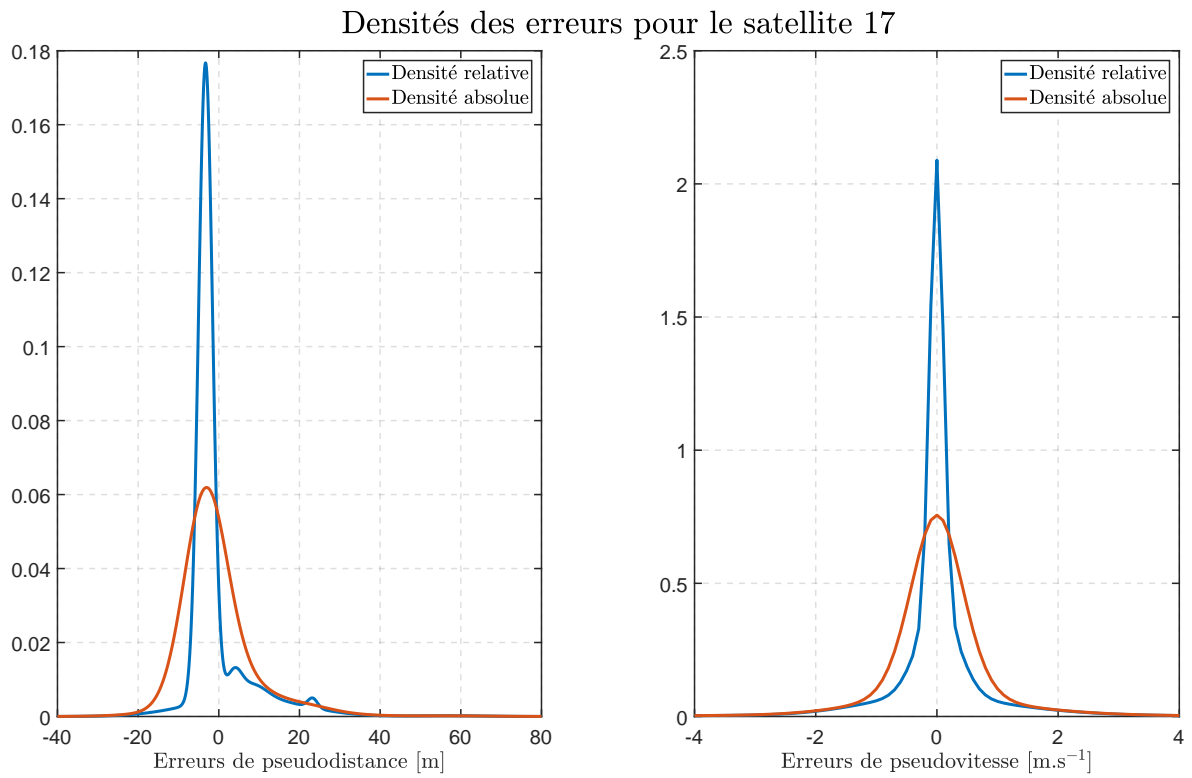


FIGURE 4.13 – Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 17.

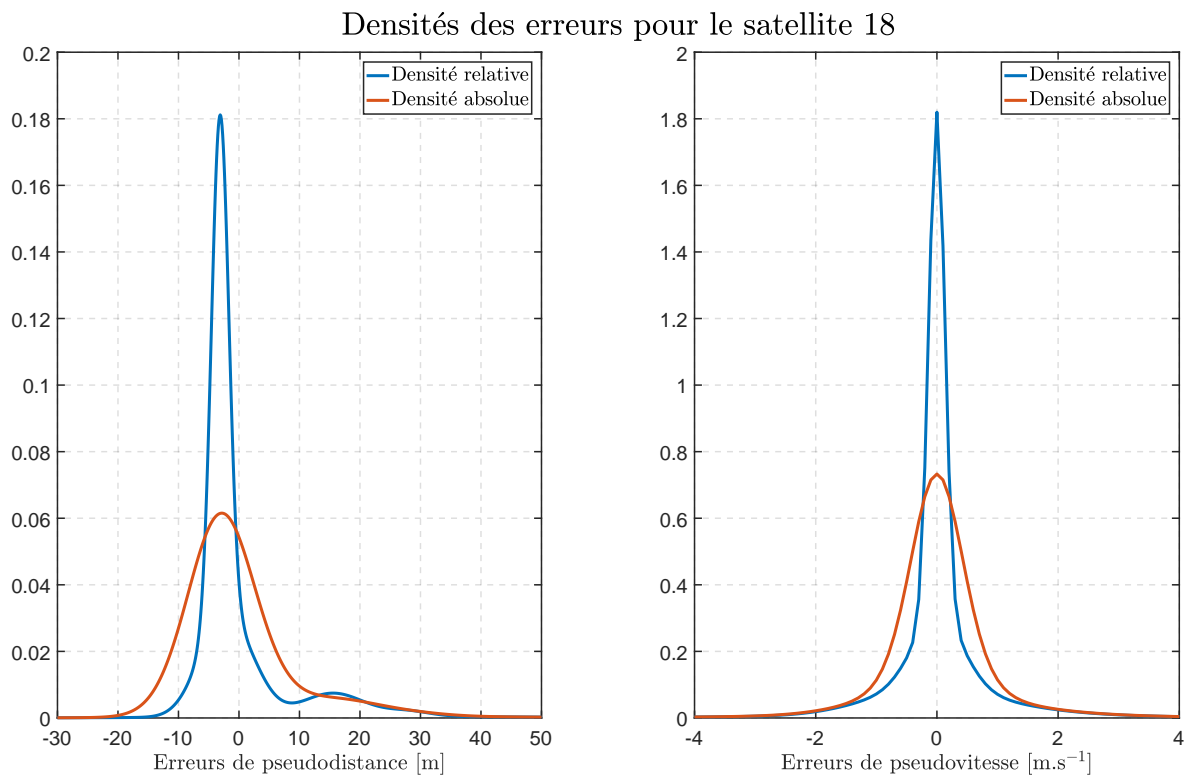


FIGURE 4.14 – Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 18.

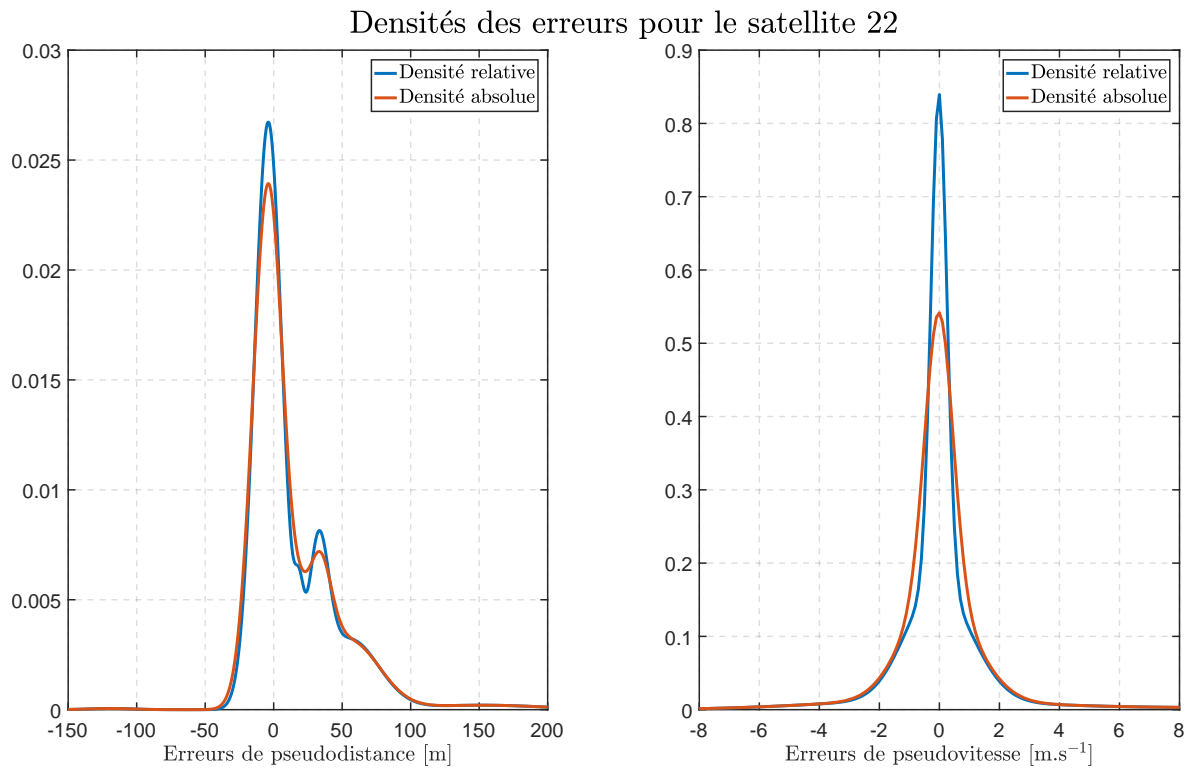


FIGURE 4.15 – Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 22.

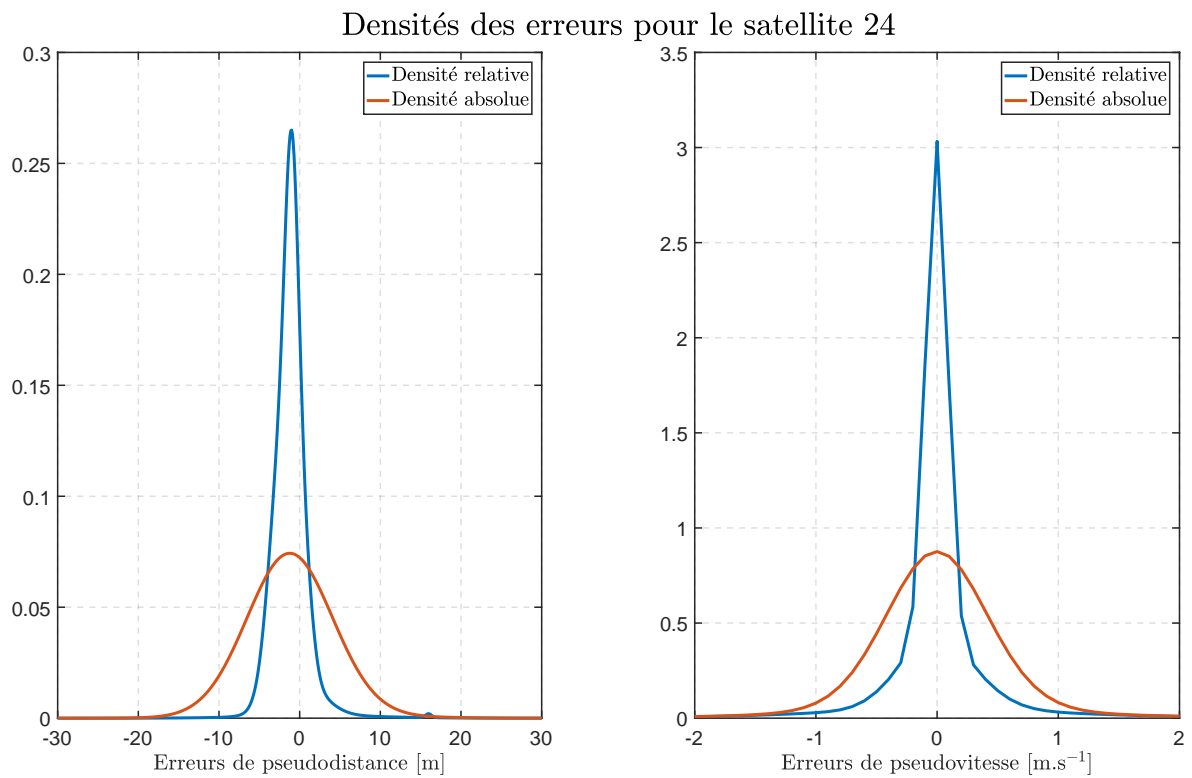


FIGURE 4.16 – Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 24.

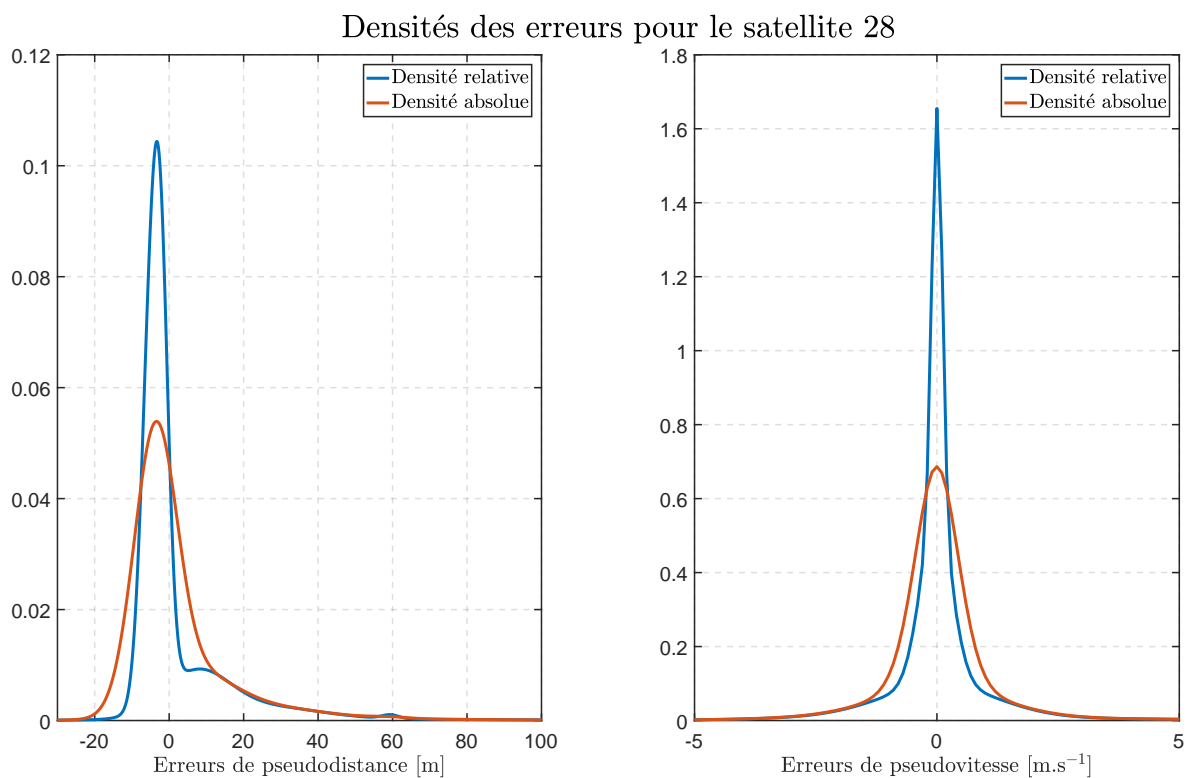


FIGURE 4.17 – Densités estimées des erreurs de mesures pour le satellite 28.

| | 5 | 12 | 13 | 15 | 17 | 18 | 22 | 24 | 28 |
|------------|---|--|---|--------|---|---|--|---|--|
| α_i | 0.2645 0.2223 0.0168 0.0961 0.1194 0.2810 | 0.1682 0.4869 0.2189 0.0712 0.0169 0.0378 | 0.4750 0.0033 0.0169 0.0261 0.1512 0.3275 | 1 | 0.1686 0.0091 0.0411 0.2762 0.0417 0.4633 | 0.1662 0.2193 0.0530 0.0010 0.0625 0.4979 | 0.2297 0.0121 0.0316 0.4465 0.1911 0.0890 | 0.5871 0.0478 0.1448 0.0773 0.1427 3.3956 $\times 10^{-4}$ | 0.3644 0.0566 0.2431 0.0299 0.3019 0.0041 |
| μ_i | -8.9268 $\times 10^{-4}$ -0.0474 8.7459 1.4803 0.0156 0.0133 | -0.0978 9.9737 $\times 10^{-4}$ 0.1936 0.5481 -2.5544 -1.5482 | 7.2245 $\times 10^{-4}$ 8.2166 -0.9657 1.1074 0.2007 -0.0018 | 0 | -0.2185 4.4509 1.3223 0.0183 -0.6670 -0.0049 | -0.2086 0.0185 0.1050 15.8477 0.9012 -0.0016 | -0.4003 11.1164 4.1883 -0.0146 0.4780 -1.1360 | -0.0032 0.2543 0.1114 -0.0147 -0.1012 9.2283 | -0.0184 0.9931 0.0865 -1.2790 0.0045 -10.4460 |
| σ_i | 0.4091 1.1022 3.8510 5.8177 2.2591 0.6246 | 0.5490 0.3998 0.8536 3.7709 1.6050 0.8277 | 0.3913 7.0964 2.1901 2.4556 0.9413 0.4620 | 0.3806 | 1.0994 4.0853 1.1374 0.5081 3.4511 0.3960 | 1.0399 0.5643 3.2181 1.6123 1.2851 0.4024 | 1.0340 2.4773 3.8606 0.4632 1.0954 3.3803 | 0.3910 1.6102 0.4886 0.9722 0.4698 1.2287 | 0.4990 3.3836 1.2212 1.6223 0.3957 3.7780 |

TABLEAU 4.2 – Mélanges de Gaussiennes estimés pour les erreurs de pseudovitesse de chaque satellite.

4.3 Estimation des erreurs et des modèles de mesures GNSS par mélanges de Gaussiennes et modèles de Markov cachés

Les erreurs affectant une mesure GNSS sont corrélées temporellement. En effet, si à un instant donné un multitrajet apparaît, il y a de fortes chances qu'à l'instant d'après il y soit encore. Cette corrélation temporelle peut être modélisée à l'aide de modèles HMM, ce qui est l'objectif de cette partie.

4.3.1 Approche proposée

Les modèles HMM sont utilisés dans de nombreux domaines d'applications, et notamment en traitement de la parole [Rabiner \[1989\]](#). Dans un premier temps, nous rappelons quelques définitions et introduisons quelques notations avant de rappeler le fonctionnement de l'algorithme permettant d'estimer les différentes composantes d'un modèle HMM.

4.3.1.1 Chaîne de Markov

Un chaîne de Markov est un processus stochastique qui possède la propriété de Markov. Cette propriété affirme que la distribution du processus à un instant donné conditionnée aux réalisations passées ne dépend que de la dernière réalisation, i.e., (x_k) est une chaîne de Markov si, et seulement si, pour tout instant k , sa densité vérifie

$$f(x_k|x_{k-1}, \dots, x_0) = f(x_k|x_{k-1}). \quad (4.20)$$

N.B., le vecteur d'état défini à l'équation (1.80) est une chaîne de Markov. Il existe deux types de chaînes de Markov : les chaînes de Markov à espace d'états discret et celles à espace d'états continu. Dans le premier cas, $x_k|x_{k-1}$ est une variable aléatoire discrète, et dans le second c'est une variable aléatoire absolument continue. On se limitera dans la suite au cas discret et on supposera de plus que la chaîne est homogène, i.e., $f(x_k|x_{k-1})$ ne dépend pas de k . Pour caractériser une chaîne de Markov stationnaire à M états, il suffit de définir une matrice (de transition) $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq M} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ et un vecteur (de probabilités initiales) $\Pi = (\pi_i)_{1 \leq i \leq M} \in \mathbb{R}^M$ tels que

$$a_{i,j} = P(x_k = j | x_{k-1} = i) \quad (4.21)$$

$$\pi_i = P(x_0 = i). \quad (4.22)$$

Il faudra évidemment veiller à avoir $\forall i, j \in \{1, \dots, M\}$,

$$\pi_i > 0 \quad (4.23)$$

$$a_{i,j} > 0 \quad (4.24)$$

$$\sum_{i=1}^M \pi_i = 1 \quad (4.25)$$

$$\sum_{j=1}^M a_{i,j} = 1 \quad (4.26)$$

afin que la mesure de probabilité soit bien définie.

4.3.1.2 Modèle de Markov caché

Un modèle de Markov caché, ou HMM, est constitué de deux processus stochastiques : un processus observable y_k et un processus non-observable x_k . De plus, on suppose que x_k suit une chaîne de Markov stationnaire à états discrets et que la loi de y_k dépend seulement de l'état dans lequel se trouve x_k à l'instant k , et que l'on connaît la distribution de $y_k|x_k$.

Notons que le modèle défini par les équations (1.80) et (1.92), est aussi un modèle HMM, mais avec des états cachés $x_t = \boldsymbol{\xi}_k$ continus. Un mélange de Gaussiennes peut donc être considéré comme un processus de Markov en considérant les modes de chacun des mélanges comme des variables cachées (c'est d'ailleurs ce qui est fait pour introduire l'algorithme EM). Autrement dit, nous allons reprendre l'estimation faite à la partie précédente en rajoutant une information temporelle de passage d'un état à un autre, i.e., on va rajouter comme hypothèse que pour une mesure i , le paramètre $c_{i,k}$, indiquant l'état de la mesure du satellite i à l'instant k , suit une chaîne de Markov, et donc que pour chaque mesure i , on a

$$P(c_{i,k} = \ell | c_{i,k-1} = m) = (\mathbf{A}_i)_{m,\ell} \quad (4.27)$$

$$P(c_{i,0} = \ell) = (\Pi_i)_\ell \quad (4.28)$$

$$\nu_{i,k} | c_{i,k}, \Theta'_i \sim \mathcal{N}(\mu_{i,c_{i,k}}, \sigma_{i,c_{i,k}}^2) \quad (4.29)$$

où $\Theta'_i = \{\mu_{i,\ell}, \sigma_{i,\ell}^2\}_{\ell=1,\dots,M}$. Si on reformulait le problème résolu par EM dans la partie précédente, celui-ci s'écrirait de manière similaire

$$P(c_{i,k} = \ell) = \alpha_{i,\ell} \quad (4.30)$$

$$\nu_{i,k} | c_{i,k}, \Theta'_i \sim \mathcal{N}(\mu_{i,c_{i,k}}, \sigma_{i,c_{i,k}}^2). \quad (4.31)$$

Les paramètres à estimer pour chaque mesure i sont regroupés dans le vecteur $\lambda_i = \{\mathbf{A}_i, \Pi_i, \Theta'_i\}$.

4.3.1.3 Estimation du modèle HMM

4.3.2 Estimation des densités d'erreur

L'estimation des paramètres d'un modèle HMM peut se faire à l'aide de la méthode de Baum-Welch [Rabiner \[1989\]](#), qui est une méthode d'apprentissage non-supervisée, et qui est rappelée dans l'annexe D.1.2. Une fois de plus, nous estimons les densités relatives à un satellite de référence, avant d'ajouter la variance supposée pour ce satellite à la variance de chacun des modes du mélange, comme dans la partie 4.2.4. Nous donnons sous forme de tableau les distributions estimées pour les satellites 5, 12, 13, 15, 17, 18, 22, 24 et 28 dans les tables 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 et 4.11 respectivement.

| \mathbf{A}_i | | | | | | Π_i | $\boldsymbol{\mu}_i$ | $\boldsymbol{\sigma}_i$ |
|----------------------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------|----------------------------|-------------------------------|
| 0.9545 | 0.0026 | 0.0058 | 0.0188 | 0 | 0.082 | [9.4683–92] | [28.6281] | [8.4495] |
| 0 | 0.9610 | 0.0056 | 0.022 | 0.0113 | 0 | 0 | 85.9142 | 10.8231 |
| 0 | 0 | 0.9933 | 0 | 0 | 0.0067 | 1 | -3.1006 | 5.9039 |
| 0.0095 | 0.0117 | 0.0025 | 0.9740 | 0.0024 | 0 | 4.875–282 | 56.6518 | 8.4353 |
| 0 | 0.0065 | 0.0065 | 0 | 0.9869 | 0 | 0 | 123.8649 | 12.1459 |
| 0.078 | 0 | 0.0248 | 0 | 0 | 0.9574 | [1.5383–30] | [11.2871] | [7.6173] |
| \mathbf{A}_{i+s_k} | | | | | | Π_{i+s_k} | $\boldsymbol{\mu}_{i+s_k}$ | $\boldsymbol{\sigma}_{i+s_k}$ |
| 0.7572 | 0 | 0.2052 | 0.0034 | 0.0342 | 0 | [1.2869–35] | [-1.4155] | [1.0707] |
| 0 | 0.9447 | 1.4491–24 | 0 | 0 | 0.0553 | 0 | 8.224 | 3.3218 |
| 0.0466 | 3.6115–4 | 0.8990 | 0.0284 | 0.0013 | 0.0243 | 5.0917–129 | 0.0797 | 0.7841 |
| 0.033 | 0 | 0.033 | 0.9654 | 2.1226–52 | 1.3248–9 | 1 | 8.9043–4 | 0.4488 |
| 0.1351 | 0 | 0.0079 | 4.3716–46 | 0.8571 | 0 | 9.0543–318 | -5.6371 | 2.9295 |
| 0.0210 | 0.0347 | 0.1040 | 2.5765–23 | 0 | 0.8404 | 0 | 2.1209 | 1.2774 |

TABLEAU 4.3 – Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 5.

| A_i | | | | | | Π_i | μ_i | σ_i |
|-----------|----------|----------|-----------|--------|-----------|------------|---------|------------|
| 0.9550 | 1.5338-9 | 7.1039-4 | 2.9902-99 | 0.0211 | 0.0232 | 0 | -1.4508 | 5.0609 |
| 5.0819-19 | 0.9580 | 0.0059 | 0.0125 | 0.0236 | 0 | 7.3991-35 | 17.0040 | 7.2744 |
| 0.0114 | 0 | 0.9522 | 9.6901-4 | 0 | 0.0354 | 0 | -7.3832 | 6.131 |
| 0 | 0.0231 | 0 | 0.9769 | 0 | 0 | 4.4040-263 | 43.2591 | 12.6359 |
| 0.339 | 0.0178 | 0.0093 | 0 | 0.9389 | 3.3364-10 | 1 | 3.6700 | 5.8009 |
| 0.0289 | 0 | 0.0097 | 0 | 0 | 0.9615 | 0 | -3.5811 | 5.0506 |

| A_{i+s_k} | | | | | | Π_{i+s_k} | μ_{i+s_k} | σ_{i+s_k} |
|-------------|----------|--------|--------|-----------|-----------|---------------|---------------|------------------|
| 0.9803 | 7.0872-4 | 0 | 0.0189 | 3.6452-68 | 1.1649-39 | 1 | -0.0049 | 0.4240 |
| 1.3016-6 | 0.7369 | 0 | 0.2053 | 0.0578 | 0 | 3.1241-225 | -1.2656 | 0.9568 |
| 0 | 0 | 0.8708 | 0 | 0 | 0.1292 | 0 | 4.550 | 3.2116 |
| 0.0349 | 0.0343 | 0 | 0.8703 | 4.7123-4 | 0.0600 | 2.4378-109 | -0.0119 | 0.6714 |
| 0.0063 | 0.1166 | 0 | 0.0329 | 0.8442 | 0 | 8.3209-312 | -3.3137 | 2.0806 |
| 1.3610-4 | 0.0550 | 0.0395 | 0.2110 | 0.0148 | 0.6796 | 8.0062-261 | 1.1436 | 1.0063 |

TABLEAU 4.4 – Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 12.

| A_i | | | | | | Π_i | μ_i | σ_i |
|-----------|--------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|---------|------------|
| 0.9691 | 0 | 0.0109 | 0 | 0 | 0.0201 | 1 | -0.6102 | 5.0363 |
| 0 | 0.9806 | 0 | 0.0194 | 1.0738-37 | 0 | 0 | 38.7226 | 7.4463 |
| 0.0346 | 0 | 0.9615 | 6.0182-12 | 0.0039 | 1.0681-5 | 8.3043-91 | -2.9254 | 5.5341 |
| 1.2279-89 | 0.0067 | 0 | 0.9586 | 0.0327 | 0.0020 | 0 | 17.2093 | 6.7785 |
| 0 | 0 | 0.0207 | 0.0210 | 0.9246 | 0.0337 | 0 | 5.6659 | 5.5822 |
| 0.0193 | 0 | 6.9589-4 | 0 | 0.134 | 0.9665 | 2.7782-95 | 1.5910 | 5.0489 |

| A_{i+s_k} | | | | | | Π_{i+s_k} | μ_{i+s_k} | σ_{i+s_k} |
|-------------|--------|--------|----------|--------|-----------|---------------|---------------|------------------|
| 0.9858 | 0 | 0.0106 | 4.5343-4 | 0.0031 | 1.7272-20 | 1 | -3.2395-4 | 0.4191 |
| 0.0530 | 0.8208 | 0 | 0 | 0 | 0.1262 | 1.8430-125 | 10.6771 | 5.5142 |
| 0.0403 | 0 | 0.8889 | 0.0110 | 0.0599 | 6.6448-7 | 1.0065-51 | -0.0351 | 0.6852 |
| 0.0187 | 0 | 0.1690 | 0.7486 | 0.0487 | 0.0150 | 6.9554-101 | -2.0616 | 1.6488 |
| 0.0191 | 0 | 0.1898 | 0.0310 | 0.7204 | 0.0397 | 9.1601-71 | 0.8518 | 0.9527 |
| 0.0108 | 0.0563 | 0.0067 | 0 | 0.2845 | 0.6417 | 6.3004-135 | 3.5385 | 1.3307 |

TABLEAU 4.5 – Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 13.

| A_i | Π_i | μ_i | σ_i |
|-------|---------|---------|------------|
| 1 | 1 | 0 | 5 |

| A_{i+s_k} | Π_{i+s_k} | μ_{i+s_k} | σ_{i+s_k} |
|-------------|---------------|---------------|------------------|
| 1 | 1 | 0 | 0.3806 |

TABLEAU 4.6 – Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 15 (satellite de référence).

| A_i | | | | | | Π_i | μ_i | σ_i |
|--------|--------|--------|--------|------------|----------|---------|---------|------------|
| 0.9531 | 0 | 0.0054 | 0.0103 | 0 | 0.0312 | 0 | -4.1968 | 5.0532 |
| 0 | 0.9803 | 0 | 0 | 0.0197 | 0 | 0 | 23.2915 | 12.0699 |
| 0.0103 | 0 | 0.9150 | 0.0121 | 0.0216 | 0.0410 | 0 | -0.4237 | 5.1434 |
| 0.0390 | 0 | 0 | 0.9549 | 0.0021 | 0.0040 | 1 | -8.0868 | 7.4076 |
| 0 | 0.0140 | 0.0287 | 0 | 0.9573 | 9.3150-7 | 0 | 6.8583 | 5.8616 |
| 0.0241 | 0 | 0.0194 | 0.0010 | 2.3181-117 | 0.9555 | 0 | -2.5571 | 5.0271 |

| A_{i+s_k} | | | | | | Π_{i+s_k} | μ_{i+s_k} | σ_{i+s_k} |
|-------------|--------|-----------|--------|----------|-----------|---------------|---------------|------------------|
| 0.9829 | 0.0170 | 2.6972-62 | 0 | 4.0831-5 | 1.8824-13 | 1 | -0.0028 | 0.4249 |
| 0.0369 | 0.8645 | 4.800-11 | 0 | 0.0488 | 0.0498 | 1.3680-117 | 0.0117 | 0.7055 |
| 0.0121 | 0.0025 | 0.8328 | 0 | 0.1526 | 0 | 3.0465-237 | -3.8735 | 2.4962 |
| 0 | 0 | 0 | 0.8278 | 0 | 0.1722 | 0 | 5.3979 | 2.7202 |
| 5.1104-4 | 0.2702 | 0.0492 | 0 | 0.6465 | 0.0335 | 4.1673-157 | -1.3689 | 0.8506 |
| 0.0122 | 0.1988 | 0.0046 | 0.0369 | 0.0287 | 0.7187 | 2.7619-225 | 1.4944 | 0.9873 |

TABLEAU 4.7 – Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 17.

| A_i | Π_i | μ_i | σ_i |
|---|--|---|---|
| $\begin{bmatrix} 0.9555 & 0 & 0.0012 & 0.0067 & 0.0367 & 0 \\ 0 & 0.9595 & 0.0021 & 0.0244 & 4.9459 - 18 & 0.0141 \\ 0.0029 & 0.0013 & 0.9359 & 0.0250 & 0.0349 & 0 \\ 0.0109 & 0.0256 & 0.0363 & 0.9210 & 0.0062 & 0 \\ 0.0160 & 0 & 0.0288 & 0.0027 & 0.9525 & 0 \\ 0.0219 & 0.0125 & 0 & 0 & 0 & 0.9656 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2.1557 - 146 \\ 0 \\ 1 \\ 5.2731 - 139 \\ 1.9323 - 99 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -5.9688 \\ 14.3608 \\ -1.6883 \\ 1.6031 \\ -3.4735 \\ 24.8264 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 5.2532 \\ 7.0565 \\ 5.0449 \\ 5.3345 \\ 5.0376 \\ 23.3726 \end{bmatrix}$ |
| A_{i+s_k} | Π_{i+s_k} | μ_{i+s_k} | σ_{i+s_k} |
| $\begin{bmatrix} 0.9836 & 6.8490 - 28 & 0.0145 & 0 & 0.0018 & 1.3680 - 9 \\ 1.3688 - 28 & 0.7681 & 2.2771 - 4 & 0 & 0.2232 & 0.0085 \\ 0.0261 & 2.2336 - 6 & 0.8569 & 0 & 0.0663 & 0.0507 \\ 0 & 0 & 0.0225 & 0.8326 & 0 & 0.1449 \\ 0.0084 & 0.0382 & 0.2498 & 0 & 0.6781 & 0.0255 \\ 0.0099 & 0.0072 & 0.1846 & 0.0264 & 0.0242 & 0.7477 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 3.0988 - 261 \\ 2.0416 - 114 \\ 0 \\ 6.4579 - 133 \\ 1.2258 - 196 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.0013 \\ -3.362 \\ 0.0440 \\ 5.2742 \\ -0.9905 \\ 1.4205 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.4247 \\ 2.2830 \\ 0.6514 \\ 3.9285 \\ 0.8839 \\ 1.0141 \end{bmatrix}$ |

TABLEAU 4.8 – Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 18.

| A_i | Π_i | μ_i | σ_i |
|--|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 0.9614 & 0 & 0 & 0.0192 & 0.0054 & 0.0140 \\ 0 & 0.9796 & 0.0138 & 0 & 0.0040 & 0.0027 \\ 3.2279 - 4 & 0.0067 & 0.9824 & 0 & 0 & 0.0106 \\ 0.0114 & 0 & 4.7827 - 4 & 0.9847 & 0.0034 & 9.4381 - 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0158 & 0.9828 & 0.0014 \\ 0.0158 & 0 & 0.0071 & 5.2173 - 4 & 0 & 0.9766 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 9.3123 \\ 135.2722 \\ 63.1064 \\ -3.4492 \\ -19.9294 \\ 33.4949 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 7.7847 \\ 44.2152 \\ 12.0799 \\ 5.4800 \\ 15.2207 \\ 8.6556 \end{bmatrix}$ |
| A_{i+s_k} | Π_{i+s_k} | μ_{i+s_k} | σ_{i+s_k} |
| $\begin{bmatrix} 0.9134 & 0.239 & 0.0328 & 0 & 0.0266 & 0.0033 \\ 0.0815 & 0.8794 & 3.6794 - 20 & 0.0240 & 0.0148 & 0 \\ 0.0346 & 0.417 - 7 & 0.9629 & 0 & 0.0025 & 7.2748 - 32 \\ 0.0430 & 0.0283 & 7.599 - 12 & 0.9287 & 0 & 0 \\ 0.1060 & 0.0075 & 0.0067 & 0 & 0.8521 & 0.0276 \\ 0.0249 & 0 & 0.0022 & 0 & 0.0897 & 0.8832 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 7.5993 - 120 \\ 5.8347 - 301 \\ 0 \\ 2.8915 - 113 \\ 5.5050 - 262 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.0504 \\ 1.8035 \\ -0.016 \\ 8.7428 \\ -1.2823 \\ -4.0180 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.7867 \\ 1.2388 \\ 0.4606 \\ 3.0854 \\ 0.9559 \\ 2.4769 \end{bmatrix}$ |

TABLEAU 4.9 – Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 22.

| A_i | Π_i | μ_i | σ_i |
|---|---|--|--|
| $\begin{bmatrix} 0.9423 & 0.0377 & 0.0162 & 0.0029 & 0 & 8.1021 - 4 \\ 0.0217 & 0.9453 & 8.4957 - 4 & 0.0305 & 0.0014 & 1.8941 - 4 \\ 0.0492 & 4.6438 - 4 & 0.9354 & 0.0045 & 0 & 0.0105 \\ 0.0014 & 0.0305 & 0 & 0.9428 & 4.2704 - 4 & 0.0249 \\ 0 & 0.0050 & 0.0072 & 0 & 0.9094 & 0.0784 \\ 0 & 0.0032 & 0 & 0.0412 & 0.0154 & 0.9402 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2.4017 - 54 \\ 1 \\ 4.5338 - 91 \\ 1.0118 - 60 \\ 1.3646 - 93 \\ 7.2172 - 133 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.8395 \\ -0.5378 \\ 4.9259 \\ -1.7544 \\ -5.5413 \\ -3.3391 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 5.0372 \\ 5.0174 \\ 6.4993 \\ 5.0189 \\ 5.4657 \\ 5.0434 \end{bmatrix}$ |
| A_{i+s_k} | Π_{i+s_k} | μ_{i+s_k} | σ_{i+s_k} |
| $\begin{bmatrix} 0.8512 & 0.0476 & 0.0498 & 0 & 1.0022 - 4 & 0.0243 \\ 0.2228 & 0.6421 & 0.0215 & 0 & 0.0397 & 0.0740 \\ 0.0116 & 4.3533 - 4 & 0.9866 & 0 & 7.0266 - 7 & 0.0014 \\ 0 & 0.2000 & 0 & 0.8000 & 0 & 0 \\ 4.9425 - 4 & 0.2796 & 0.0423 & 0.0103 & 0.6247 & 0.0426 \\ 0.1572 & 0.1375 & 0.0037 & 0 & 0.0117 & 0.6900 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 8.3162 - 96 \\ 2.4461 - 114 \\ 1 \\ 0 \\ 7.0114 - 187 \\ 1.0031 - 177 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.0387 \\ 0.6125 \\ -0.0030 \\ 9.2288 \\ 2.5368 \\ -0.9823 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.6152 \\ 0.8501 \\ 0.4150 \\ 1.2318 \\ 1.0419 \\ 1.1529 \end{bmatrix}$ |

TABLEAU 4.10 – Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 24.

| A_i | | | | | | Π_i | μ_i | σ_i |
|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|--------------|----------------|---------------|------------------|
| 0.9709 | $9.9784 - 4$ | 0 | 0.0281 | 0 | | 1 | $[-7.1719]$ | $[5.2596]$ |
| 0.0026 | 0.9473 | $7.8966 - 4$ | 0 | 0.0240 | 0.0253 | $6.1065 - 302$ | $[-1.4623]$ | $[5.0607]$ |
| 0 | $2.3923 - 12$ | 0.9592 | 0.0121 | 0.0090 | 0.0197 | 0 | $[15.0040]$ | $[7.8207]$ |
| 0 | 0 | 0.0239 | 0.9761 | 0 | 0 | 0 | $[42.5148]$ | $[30.2831]$ |
| 0.0214 | 0.0267 | 0 | 0 | 0.9475 | 0.0044 | $8.8031.55$ | $[2.3336]$ | $[5.0795]$ |
| 0 | 0.0347 | 0.0322 | 0 | 0.0148 | 0.9184 | 0 | | $[5.4393]$ |
| A_{i+s_k} | | | | | | Π_{i+s_k} | μ_{i+s_k} | σ_{i+s_k} |
| 0.9789 | $1.3345 - 13$ | 0 | $4.5013 - 11$ | 0.0290 | $2.1361 - 4$ | 1 | $[-0.0012]$ | $[0.4321]$ |
| 0.0041 | 0.8258 | 0 | 0.0183 | 0.0482 | 0.1036 | $1.6517 - 119$ | $[5.0967]$ | $[2.0025]$ |
| 0 | 0 | 0.8041 | 0.1711 | $1.3291 - 4$ | 0.0247 | $5.0985 - 190$ | $[-7.2597]$ | $[4.5706]$ |
| $2.0198 - 4$ | 0 | 0.0250 | 0.8128 | 0.1371 | 0.0250 | $3.1094 - 113$ | $[-1.7343]$ | $[1.1937]$ |
| 0.0305 | $3.3347 - 4$ | 0 | 0.0243 | 0.8996 | 0.0453 | $3.5250 - 50$ | $[-0.0552]$ | $[0.7220]$ |
| 0.0046 | 0.0283 | 0 | 0.0339 | 0.1635 | 0.7696 | $6.4360 - 68$ | $[1.4652]$ | $[1.0406]$ |

TABLEAU 4.11 – Paramètres HMM estimés par Baum-Welch pour les pseudodistances (en haut) et les pseudovitesse (en bas) du satellites 28.

4.4 Méthodes de filtrage

On rappelle que le modèle peut se mettre sous la forme

$$\xi_k = \mathbf{F}\xi_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{z}_k = h_k(\xi_k) + \mathbf{n}_k(\mathbf{c}_k) \quad (4.33)$$

où tous les termes ont déjà été explicités dans les équations (1.80) (p. 36) et (1.92) (p. 37), $\mathbf{c}_k = (c_{i,k})_{i=1,\dots,2s_k}$ et $\mathbf{n}_k(\mathbf{c}_k) = (n_{i,k}(c_{i,k}))_{i=1,\dots,2s_k}$ avec $n_{i,k}(c_{i,k}) \sim \mathcal{N}(n_{i,k}; \mu_{i,c_{i,k}}, \sigma_{i,c_{i,k}}^2)$. Nous allons donc considérer deux modèles pour $c_{i,k}$: ou bien on ne tient pas comptes des réalisations précédentes, et dans ce cas on considère $P(c_{i,k} = j) = \alpha_{i,j}$ avec le modèle estimé par mélange de Gaussiennes, ou bien on considère que les $c_{i,k}$ évoluent suivant les chaînes de Markov estimées précédemment. Ces deux méthodes vont donc donner lieu à deux algorithmes de filtrage différents.

4.4.1 Filtrage par mélanges de Gaussiennes

Le filtrage sous hypothèse de mélange de Gaussiennes a été largement étudié dans la littérature [Alspach et Sorenson \[1972\]](#); [Chen et Liu \[2000\]](#); [Kubo et al. \[2011\]](#). Il consiste à considérer q_k filtres de Kalman en parallèle, correspondant à chaque état possible du modèle de mesure (dans notre cas $q_k = M^{2s_k}$), puis à fusionner chaque filtre pour en déduire l'estimation du vecteur d'état. Plus d'informations sur les différentes étapes de ce filtrage sont données dans l'annexe D.2.1.

4.4.2 Filtrage par chaînes de Markov

Nous allons cette fois considérer qu'à l'instant k , le bruit de mesure est un mélange de gaussiennes dont l'état (une de ces gaussiennes) est gouverné par une chaîne de Markov. Le filtrage utilisé dans cette partie est dénommé *Interacting Multiple Model* (IMM) [[Bar-Shalom et al., 2002](#), Chap. 11]; [Bar-Shalom et al. \[2005\]](#); [Ozkan](#), et plus d'informations sont disponibles dans l'annexe D.2.2.

4.5 Expérimentations

Les méthodes ont d'abord été testées à l'aide de données synthétiques vérifiant les deux hypothèses (mélanges de gaussiennes simples et mélanges de gaussiennes avec corrélations temporelles (HMM)) mais elles ne sont pas présentées ici par souci de concision. Si on souhaite appliquer les filtres présentés dans les sections 4.4.1 et 4.4.2, on remarque qu'il faut calculer $q_k = M^{2s_k} \approx 10^{14}$ vecteurs d'états possibles pour 6 Gaussiennes et 9 satellites, ce qui est

infaisable en pratique car ceci engendrerait un coût de calcul trop important. Nous proposons donc de limiter le nombre d'états possibles en supposant qu'entre deux instants consécutifs, une ou deux mesures peuvent changer d'état (mais pas plus), limitant ainsi le nombre de réalisations à $q_k = 1 + (M - 1)2s_k + (M - 1)^2 \binom{2s_k}{2} \approx 3900$ pour 6 Gaussiennes et 9 satellites (N.B, si le satellite 15 est présent, comme on suppose que ce dernier n'a qu'un seul mode, il faut remplacer s_k par $s_k - 1$). Si on autorise 3 changements, on monte alors à environ 10^5 cas possibles. Nous allons dans la suite comparer plusieurs méthodes

- le filtre de Kalman étendu (EKF)
- la méthode la plus performante présentée au chapitre 2 (Danish + Fused)
- le filtrage par mélanges de Gaussiennes avec un changement max (GM1)
- le filtrage par mélanges de Gaussiennes avec deux changements max (GM2)
- le filtrage par HMM avec un changement max (HMM1)
- le filtrage par HMM avec deux changements max (HMM2).

Les CDF des erreurs de position dans le plan sont données dans la figure 4.18, et quelques vues aériennes sont données dans les figures 4.19 et 4.20. On remarque que les performances du modèle HMM sont très faibles comparées aux autres méthodes. En revanche, le fait de considérer un maximum de deux changements d'états par instant (HMM2) au lieu d'un (HMM1) a nettement amélioré les performances. En effet, la méthode HMM ne favorise pas facilement les changements d'états, de par les matrices de transition estimées (valeurs proches de 1 sur la diagonale). Donc des mesures peuvent se retrouver bloquées dans un état qui n'est pas le bon et leur changement d'état est compliqué de par les faibles probabilités de transitions. La méthode HMM serait donc améliorable en augmentant le nombre de changements autorisés. Cependant cela ne peut pas se faire naïvement comme jusqu'alors (toutes les combinaisons sont envisagées), car le nombre de combinaisons possibles serait trop important et les calculs ne se feraient pas en un temps raisonnables (et on risque d'avoir des problèmes de mémoire et de probabilités très faibles et non évaluable par le logiciel de calcul).

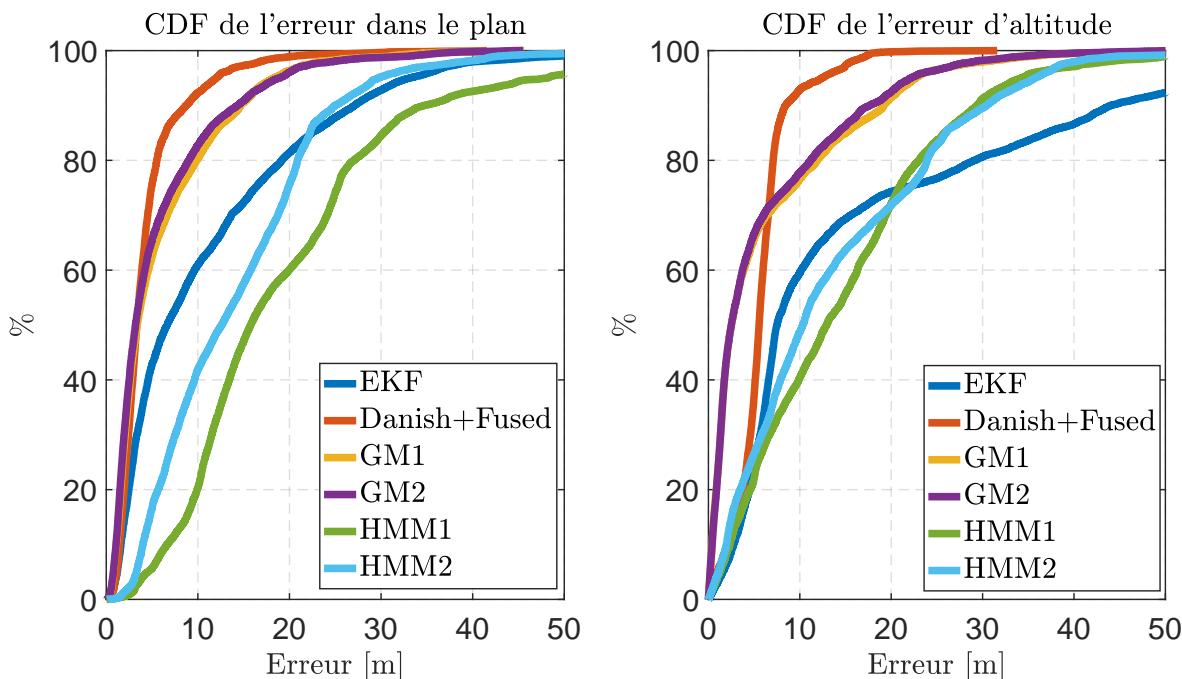


FIGURE 4.18 – CDF estimées des erreurs de positionnement pour la méthode parcimonieuse et les méthodes à base de mélanges de Gaussiennes.

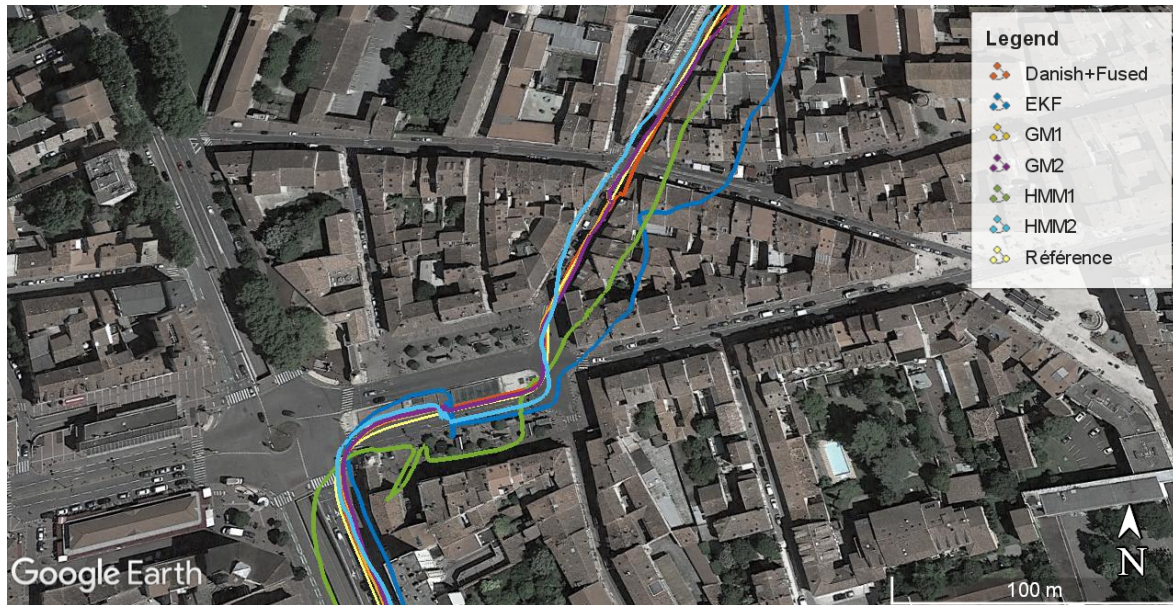


FIGURE 4.19 – Illustration des différentes trajectoires obtenues pour la méthode parcimonieuse et les méthodes à base de mélanges de Gaussiennes.



FIGURE 4.20 – Illustration des différentes trajectoires obtenues pour la méthode parcimonieuse et les méthodes à base de mélanges de Gaussiennes.

Afin de comprendre les problèmes d'estimation rencontrés avec les algorithmes HMM, nous avons analysé la portion de trajectoire représentée dans la figure 4.21. Les nombres de changements détectés par les différents algorithmes sont représentés dans les figure 4.22 et 4.23. On remarque que pour cette partie de trajectoire, les algorithmes HMM ont du mal à accepter des changements d'états, car il y en a trop en même temps (caractéristique d'un environnement urbain dense), comparé à la méthode par mélanges de Gaussiennes ou à la méthode Danish + Fused où l'on peut voir qu'il y a beaucoup plus de changements d'états.

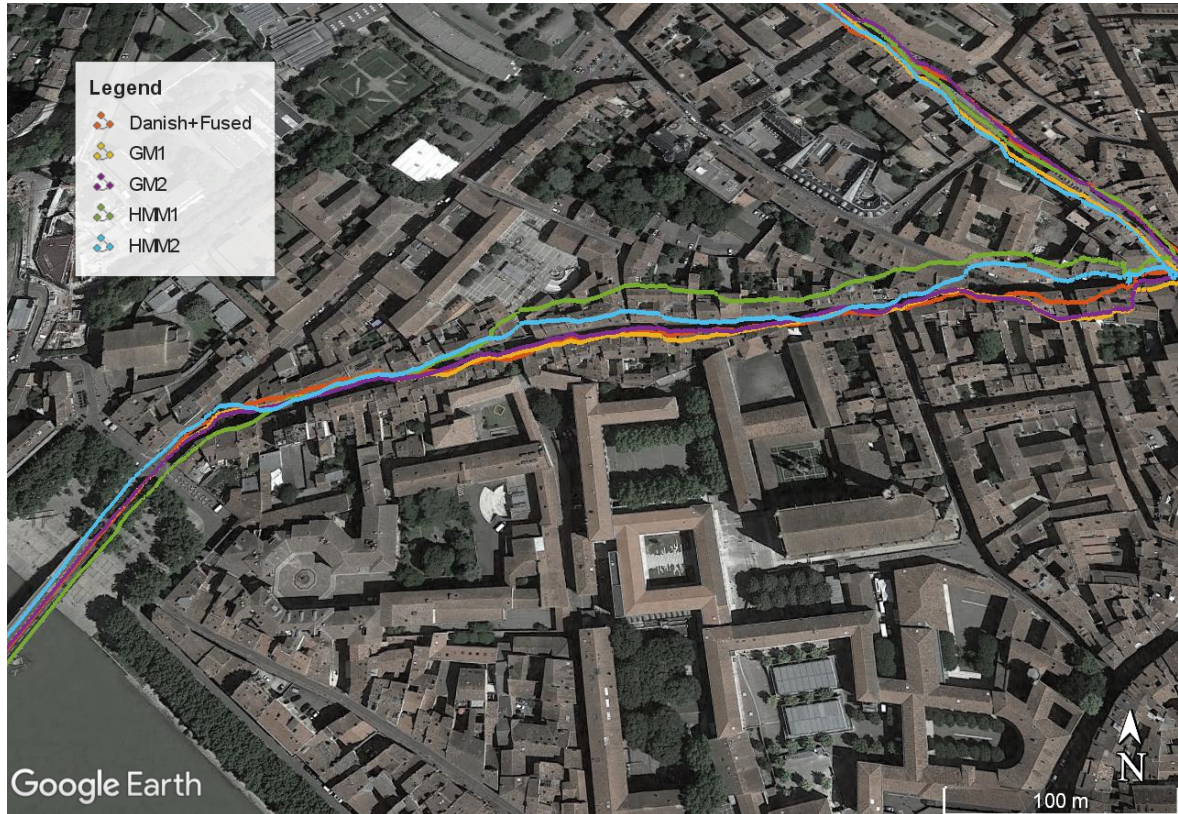


FIGURE 4.21 – Illustration où les méthodes HMM ont du mal à estimer la trajectoire correctement.

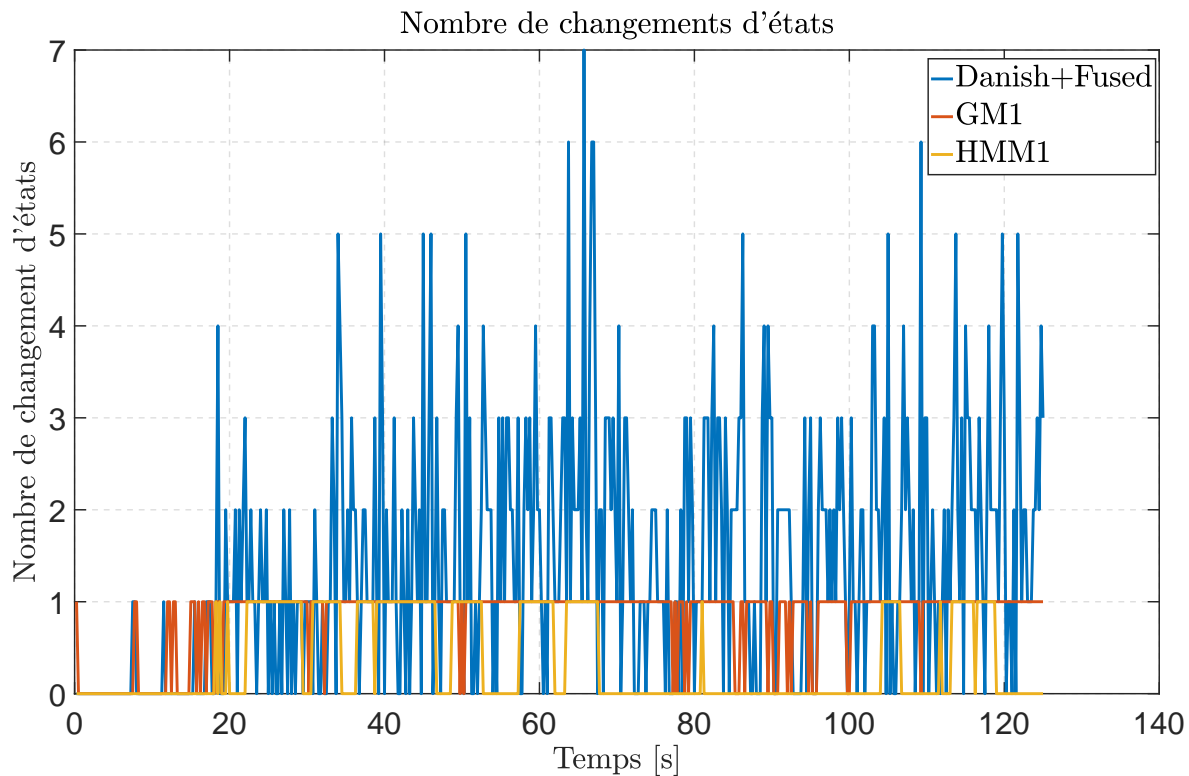


FIGURE 4.22 – Evolution du nombre de passage d'un état à un autre dans les mesures (pour la méthode parcimonieuse, la méthode à mélanges de Gaussiennes à un changement max.).

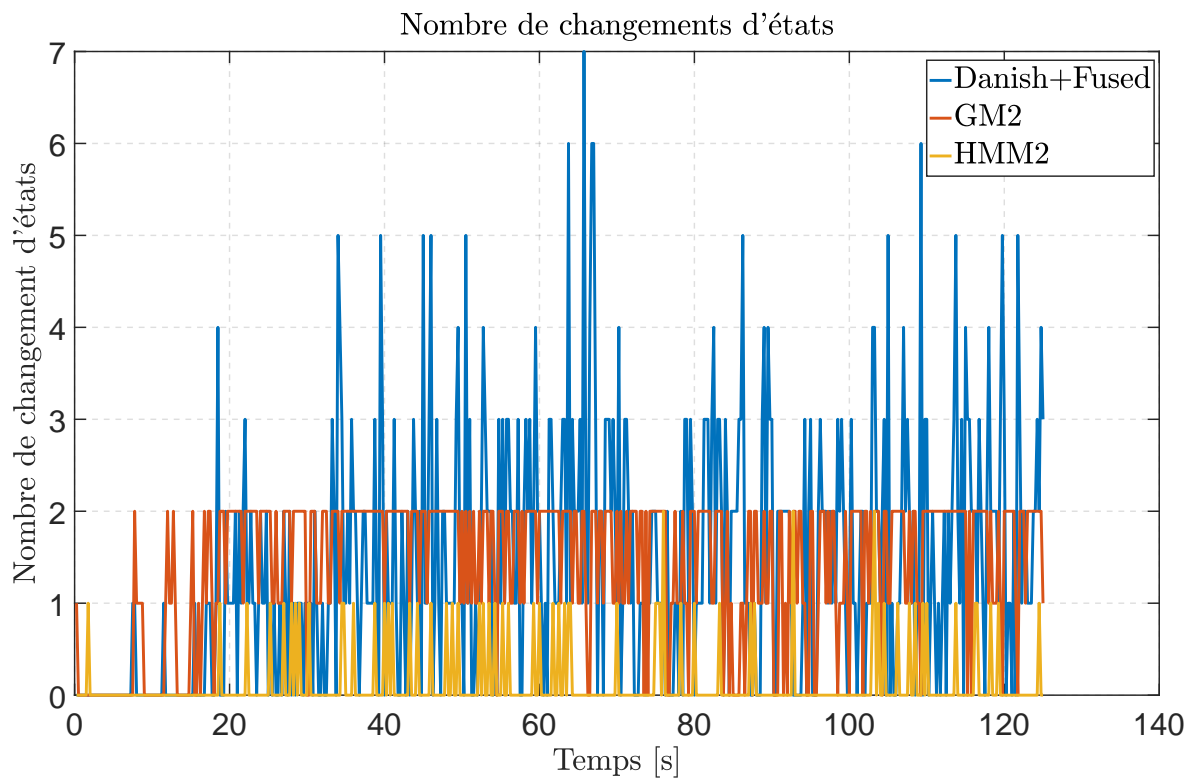


FIGURE 4.23 – Evolution du nombre de passage d'un état à un autre dans les mesures (pour la méthode parcimonieuse, la méthode à mélanges de Gaussiennes à deux changements max.).

4.6 Conclusion

Ce chapitre a proposé de résoudre le problème de positionnement en présence de biais multitrajets en modélisant le bruit de mesure par des mélanges de Gaussiennes et en développant un algorithme de filtrage adapté. Le modèle à mélanges de Gaussiennes donne des résultats satisfaisants sans pour autant égaler les performances de la méthode du chapitre 2. La méthode à modèles de Markov cachés donne des résultats moins intéressants qu’espérés mais avec une marge d’amélioration importante, notamment en reconsidérant le traitement des changements d’états d’un instant à un autre, mais aussi dans la formulation du problème (restriction à deux modes de fonctionnement). Notre objectif premier était de construire des modèles de Markov cachés parcimonieux, ce qui n’a pas pu être fait faute de temps et pourrait constituer une perspective importante de ce travail.

Plusieurs perspectives sont à considérer pour la suite de ces travaux :

- il faudrait réfléchir à une stratégie pour réduire l’ensemble des combinaisons étudiées et ainsi trouver le chemin optimal sans tous les essayer. On pourrait éviter d’avoir un filtre de Kalman par réalisation en utilisant des méthodes Bayésiennes [Fruhworth-Schnatter et al. \[2018\]](#), notamment les méthodes MCMC [Carter et Kohn \[1996\]](#), ou de filtrage particulaire [Doucet et de Freitas \[2001\]](#) ; [LeGland et Oudjane \[2003\]](#), mais qui nécessitent quand même de calculer la probabilité de chacun des états possibles
- on pourrait aussi envisager de séparer les mélanges de gaussiennes en deux modes de fonctionnement seulement (nominal et non nominal) et ainsi avoir une indicatrice à deux valeurs limitant l’espace des réalisations possibles
- le modèle à mélanges de Gaussiennes semble peu impacté par le changement du nombre d’état autorisé. Comme on ne se préoccupe pas de la valeur à l’instant précédent, si plusieurs mesures doivent changer d’état, elles peuvent le faire à des instants successifs. Cette méthode de filtrage semble alors très intéressante, mais ne parvient pas à faire aussi bien que la méthode parcimonieuse.
- ces méthodes ont nécessité l’apprentissage des différents paramètres des distributions hors lignes. Il faudrait alors voir s’il est possible d’estimer conjointement les densités d’erreurs au cours du temps et les paramètres d’intérêt de la navigation par satellite. D’autre part, il serait évidemment plus intéressant de considérer des distributions non-stationnaires, car il est clair que ces dernières ne sont pas les mêmes en environnement dégagé et en canyon urbain. Les solutions de filtrage particulaire semblent être un moyen d’aborder ces problèmes, et leurs applications aux modèles de Markov à sauts ont déjà été étudié [Petetin et Desbouvries \[2015\]](#), mais nous n’avons pas eu le temps de les aborder lors de cette thèse
- on pourrait aussi essayer de trouver une approche utilisant les méthodes parcimonieuses présentées dans cette thèse et des mélanges de Gaussiennes, afin d’estimer la densité des erreurs, où en intégrant la parcimonie comme information a priori dans un filtre particulaire par exemple.

Conclusion et perspectives

Cette thèse a pour but de proposer une solution de correction des multitrajets pour des mesures fournies par un récepteur GNSS bas-coût. Les GNSS sont décrits dans le premier chapitre qui présente une solution de navigation permettant de traiter les mesures fournies par de tels récepteurs. Ainsi, chaque personne en possession d'un récepteur bas-coût est en mesure d'appliquer la solution fournie pour trouver sa position et sa vitesse à partir seulement des données de ce récepteur. Le reste de la thèse vise à traiter la dernière source majeure d'erreur dont ils souffrent, notamment en centre ville, là où se trouve la plupart des utilisateurs de ces récepteurs.

Le deuxième chapitre formule la correction des multitrajets sur les mesures de pseudo-distances et de pseudovitesse comme un problème d'estimation parcimonieuse. Plus précisément, nous considérons que parmi tous les satellites vus par le récepteur, seuls certains d'entre eux sont soumis à des erreurs dues aux multitrajets. Cette hypothèse permet de formuler le problème de positionnement comme un problème d'estimation parcimonieuse qui permet de régulariser des problèmes sous-déterminés en appliquant une hypothèse de parcimonie aux vecteurs à estimer (qui suppose que certaines des composantes du vecteur à estimer sont nulles). Le problème à résoudre est alors formulé comme un problème des moindres carrés, pénalisé par une norme ℓ_1 pondérée qui prend en compte la qualité de réception des signaux GNSS via les valeurs des C/N_0 et la géométrie des satellites via leurs élévations. La méthode de navigation proposée a été testée sur plusieurs scénarios de simulation avant d'être testée sur des données réelles. Les simulations permettent de vérifier la bonne détection/estimation des mesures biaisées, et d'apprécier la robustesse de la méthode (en détectant jusqu'à 5 mesures biaisées sur 8 disponibles). Les expérimentations effectuées sur données réelles mettent en avant l'intérêt de la méthode, en montrant un gain non négligeable des performances, permettant d'égaliser dans certains cas les performances du récepteur boîte noire Ublox.

Le troisième chapitre présente les techniques d'inférence Bayésienne couplées avec des méthodes MCMC. Ces méthodes puissantes sont présentées dans un premier temps et appliquées à l'estimation des différents paramètres de la navigation (position, vitesse et erreur multitrajet) et à l'hyperparamètre du problème parcimonieux (paramètre de régularisation) ainsi que leurs lois a posteriori. La méthode proposée permet d'estimer les hyperparamètres conjointement aux autres variables, et ainsi d'éviter leur estimation par validation croisée (apprentissage sur un jeu de données). Cependant, cette méthode semble donner des résultats moins satisfaisants que ceux obtenus avec la méthode du deuxième chapitre.

Le quatrième chapitre propose de modéliser les erreurs de mesures à l'aide de mélanges de Gaussiennes, dont le mode dépend soit de vecteur d'états indépendants dans le temps avec une certaine probabilité a priori (mélanges de Gaussiennes simples), soit du vecteur d'états précédent l'instant courant grâce à l'utilisation d'un modèle de Markov caché (HMM). Ces deux modèles sont alors utilisés pour apprendre les distributions des erreurs de chaque satellite suivant les deux hypothèses, afin de proposer deux méthodes de filtrage associées.

Plusieurs perspectives peuvent se dégager de cette thèse. Dans le deuxième chapitre, on pourrait essayer de construire la matrice de pondération avec d'autres informations a priori fournies par le récepteur, ou d'autres indicateurs de confiance. Notamment, les récepteurs modernes fournissent plus d'informations que celles utilisées dans cette thèse, comme les mesures

de phase ou via les autres constellations et fréquences d'émission par les satellites. On pourrait alors combiner ces différents signaux pour développer d'autres indicateurs de présence de multitrajets [Cai et al. \[2016\]](#); [Pirsiavash et al. \[2018\]](#). D'autre part, la variété de ces mesures pourrait aussi être utilisée afin de travailler dans des espaces de mesure de plus grandes dimensions, et ainsi favoriser l'hypothèse de parcimonie. D'autre part, on pourrait essayer d'augmenter le nombre d'informations (afin de développer de nouveaux indicateurs pour la matrice de pondération ou pour augmenter le nombre de mesures) avec d'autres capteurs pour effectuer de la fusion de données (modèles 3D, vision, centrales inertielles, signaux d'opportunités par exemple). A ce sujet, le journal *Sensors* a sorti en 2018 une édition spéciale [Sensors \[2018\]](#).

Le troisième chapitre s'est intéressé à l'estimation Bayésienne des paramètres et hyperparamètres d'un modèle parcimonieux pour le positionnement GNSS. On pourrait envisager d'autres pénalités favorisant la parcimonie du vecteur à estimer [Soubies et al. \[2015\]](#); [Olsson et al. \[2017\]](#) et ainsi proposer de nouvelles lois a priori pour les biais multitrajets favorisant la parcimonie, ou d'autres lois a priori sur l'hyperparamètre plus informatives si on peut avoir plus d'informations en amont (valeur à l'instant précédent, DOP, fusion de données). On pourrait aussi envisager d'autres méthodes d'estimation de l'hyperparamètre, comme des méthodes basées sur le risque de Stein [Ramani et al. \[2008\]](#), ou en essayant de l'exprimer en fonction d'autre paramètres du scénario dans lequel se trouve l'utilisateur, comme le DOP, ou imaginer une carte contenant des informations sur ce paramètre en fonction de l'environnement (urbain, urbain dense ou dégagé) et ainsi travailler sur un sujet très étudié aujourd'hui, le positionnement collaboratif.

Le quatrième chapitre s'est intéressé à la formulation des erreurs de mesures comme des mélanges de Gaussiennes. Une manière d'améliorer l'estimation des densités serait de considérer une méthode de type *split and merge* pour l'estimation du nombre de Gaussiennes au lieu d'en fixer 6, afin d'espérer pouvoir réduire le nombre possible de modes [Zhang et al. \[2003\]](#), ou alors de considérer deux modes de fonctionnement : un nominal (Gaussienne centrée de variance la valeur UERE correspondante) et un non-nominal (mélanges de Gaussiennes à estimer), comme cela a été proposé dans [Viandier et al. \[2008\]](#) où on considère en plus l'état bloqué. L'algorithme de Baum-Welch pourrait être adapté pour l'apprentissage non-supervisé d'une telle distribution (il suffirait de considérer des mélanges de Gaussiennes avec un nombre variable de composantes selon le mode de la chaîne de Markov). Une manière évidente d'améliorer la méthode serait de combiner une estimation en ligne des densités et des paramètres d'intérêts, notamment pour le modèle de mélanges de Gaussiennes simples qui fournit des résultats intéressants. Cette estimation pourrait se faire à l'aide de filtre particulaire, comme cela a été proposé dans [Rabaoui et al. \[2012\]](#), qui propose comme a priori sur les états des mélanges de processus de Dirichlet, revenant à considérer des mélanges de Gaussiennes infinis. On pourrait essayer de se retreindre à des mélanges finis par une méthode de type *split and merge* [Zhang et al. \[2003\]](#). La méthode HMM nécessite d'être améliorée avant passage à une estimation en ligne de la densité, car les résultats qu'elles offrent ne sont pas très convaincants. En revanche, nous avons pu montrer qu'en changeant le nombre de transitions possibles d'un instant à l'autre, la méthode s'améliorait de manière significative. Développer un algorithme à coût de calcul raisonnable permettant de favoriser un nombre plus important de transitions nous semble être une piste intéressante, ou alors proposer une méthode favorisant les transitions les plus probables, notamment à base de méthodes Bayésiennes [Fruhirth-Schnatter et al. \[2018\]](#) comme les méthodes MCMC [Carter et Kohn \[1996\]](#), ou de filtrage particulaire [Doucet et de Freitas \[2001\]](#). Finalement, une combinaison des travaux présentés dans cette thèse permettant l'ajout d'informations a priori sur la parcimonie des vecteurs à estimer semble être envisageable, en utilisant toujours une formulation Bayésienne du problème, et en intégrant les différentes informations a priori (biais parcimonieux dont les composantes suivent des mélanges de Gaussiennes ou des modèles HMM) dans des bancs de filtres de Kalman étendus ou sans parfum [Julier et Uhlmann \[1997\]](#), des

méthodes MCMC ou des filtres particuliers.

Annexe A

Annexes du Chapitre 1

A.1 Calcul de l'état du satellite par éphémérides

A.1.1 Position du satellite

La position d'un satellite peut se calculer à l'aide de ses paramètres d'éphémérides comme décrit dans [NAVSTAR \[2018\]](#). Les constantes nécessaires au calcul de la position sont

- $\mu = 3.986004418 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ la constante gravitationnelle de la Terre pour le modèle WGS 84
- $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$ la célérité de la lumière dans le vide
- $\dot{\Omega}_e = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ la vitesse de rotation de la Terre.

On récupère ensuite dans les éphémérides les paramètres nécessaires au calcul de la position

- \sqrt{A} la racine carrée du demi axe principal
- t_{oe} le temps de référence de l'éphéméride
- Δn la différence entre mouvement moyen et valeur calculée
- M_0 l'anomalie moyenne au temps de référence
- e l'excentricité
- ω l'argument du périégée
- C_{us} l'amplitude du terme de correction en sinus harmonique de l'argument de latitude
- C_{uc} l'amplitude du terme de correction en cosinus harmonique de l'argument de latitude
- C_{rs} l'amplitude du terme de correction en sinus harmonique du rayon d'orbite
- C_{rc} l'amplitude du terme de correction en cosinus harmonique du rayon d'orbite
- C_{is} l'amplitude du terme de correction en sinus harmonique de l'angle d'inclinaison
- C_{ic} l'amplitude du terme de correction en cosinus harmonique de l'angle d'inclinaison
- i_0 l'angle d'inclinaison au temps de référence
- IDOT la dérivée de l'angle d'inclinaison
- Ω_0 la longitude du nœud ascendant du plan orbital à l'époque de la semaine
- $\dot{\Omega}$ la dérivée de l'ascension droite

Etant donnés ces différents paramètres, on est en mesure de calculer la position du satellite à la date t_{S_i} dans le plan orbital du satellite. En effet, on en déduit

- $A = (\sqrt{A})^2$ le demi grand-axe
- $n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{A^3}}$ la vitesse angulaire moyenne
- Δn la différence entre mouvement moyen et valeur calculée

- $t_k = t_{S_i} - t_{oe}$ la durée à l'époque éphéméride de référence ¹
- $n = n_0 + \Delta n$ la vitesse angulaire moyenne corrigée
- $M_k = M_0 + nt_k$ l'anomalie moyenne
- E_k tel que $M_k = E_k - e \sin(E_k)$ l'anomalie d'excentricité (équation de Kepler, peut se résoudre par itération)
- $\nu_k = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-e^2} \sin(E_k)}{\cos(E_k) - e} \right)$ la véritable anomalie
- $\Phi_k = \nu_k + \omega$ l'argument de latitude
- $\delta u_k = C_{us} \sin(2\Phi_k) + C_{uc} \cos(2\Phi_k)$ la correction de l'argument de latitude
- $\delta r_k = C_{rs} \sin(2\Phi_k) + C_{rc} \cos(2\Phi_k)$ la correction du rayon d'orbite
- $\delta i_k = C_{is} \sin(2\Phi_k) + C_{ic} \cos(2\Phi_k)$ la correction de l'angle d'inclinaison
- $u_k = \Phi_k + \delta u_k$ l'argument de latitude corrigé
- $r_k = A(1 - e \cos(E_k)) + \delta r_k$ le rayon d'orbite corrigé
- $i_k = i_0 + \delta i_k + (\text{IDOT})t_k$ l'angle d'inclinaison corrigé
- $\begin{bmatrix} x'_k \\ y'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_k \cos(u_k) \\ r_k \sin(u_k) \end{bmatrix}$ la position dans le plan orbital
- $\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e)t_k - \dot{\Omega}_e t_{oe}$ la longitude du nœud ascendant corrigée
- $\Theta = \dot{\Omega}_e(t_{S_i} - t_R)$ l'angle duquel la Terre a tourné durant la propagation du signal

Une fois ces calculs effectués, il faut choisir le repère dans lequel va s'effectuer la suite des calculs. Comme conseillé dans [Groves, 2008a, Chap. 7.1.2], nous allons tirer le meilleur des deux repères en faisant coïncider ces deux repères à la date de réception du signal t_R . Les détails du calcul de la position du satellite dans le repère ECEF sont alors

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_k = x'_k \cos(\Omega_k) - y'_k \sin(\Omega_k) \cos(i_k) \\ y_k = x'_k \sin(\Omega_k) + y'_k \cos(\Omega_k) \cos(i_k) \\ z_k = y'_k \sin(i_k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{C}_{ie} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & -\sin(\Theta) & 0 \\ \sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

avec

- \mathbf{r}_i la position du satellite i dans le repère ECEF
- \mathbf{C}_{ie} la matrice de rotation pour passer du repère ECEF au repère ECI

A.1.2 Vitesse du satellite

Pour trouver la vitesse du satellite, il suffit de dériver toutes les relations précédentes, afin d'en déduire le vecteur vitesse correspondant. Ceci a été fait dans Remondi [2004] et nous résumons ici les équations pour calculer la vitesse dans le plan orbital

- $\dot{M}_k = n$ la dérivée de l'anomalie moyenne
- $\dot{E}_k = \frac{\dot{M}_k}{1 - e \cos(E_k)}$ la dérivée de l'anomalie d'excentricité
- $\dot{\nu}_k = \sin(E_k) \dot{E}_k \frac{1 + e \cos(\nu_k)}{(1 - e \cos(E_k)) \sin(\nu_k)}$ la dérivée de la véritable anomalie
- $\dot{\Phi}_k = \dot{\nu}_k$ la dérivée de l'argument de latitude (ω est supposé constant)
- $\dot{\delta}u_k = 2(C_{us} \cos(2\Phi_k) - C_{uc} \sin(2\Phi_k)) \dot{\Phi}_k$ la dérivée de la correction de l'argument de latitude

1. il faut prendre en compte le croisement des débuts et fins de semaines : si t_k fais plus de 302400s, il faut lui retrancher 604800s, si il fait moins de -302400s, il faut lui rajouter.

- $\dot{\delta r}_k = 2(C_{rs} \cos(2\Phi_k) - C_{rc} \sin(2\Phi_k))\dot{\Phi}_k$ la dérivée de la correction du rayon d'orbite
- $\dot{\delta i}_k = 2(C_{is} \cos(2\Phi_k) - C_{ic} \sin(2\Phi_k))\dot{\Phi}_k$ la dérivée de la correction de l'angle d'inclinaison
- $\dot{u}_k = \dot{\Phi}_k + \dot{\delta u}_k$ la dérivée de l'argument de latitude corrigé
- $\dot{r}_k = Ae\dot{E}_k \sin(E_k) + \dot{\delta r}_k$ la dérivée du rayon d'orbite corrigé
- $\dot{i}_k = \dot{\delta i}_k + \text{IDOT}$ la dérivée de l'angle d'inclinaison corrigé
- $\begin{bmatrix} \dot{x}'_k \\ \dot{y}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r}_k \cos(u_k) - y'_k \dot{u}_k \\ \dot{r}_k \sin(u_k) + x'_k \dot{u}_k \end{bmatrix}$ la vitesse dans le plan orbital
- $\dot{\Omega}_k = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e)$ la longitude du nœud ascendant corrigée

dont on déduit

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \dot{x}'_k \cos(\Omega_k) - \dot{y}'_k \sin(\Omega_k) \cos(i_k) + \dot{i}_k y'_k \sin(i_k) \sin \Omega_k - y_k \dot{\Omega}_k \\ \dot{x}'_k \sin(\Omega_k) + \dot{y}'_k \cos(\Omega_k) \cos(i_k) - \dot{i}_k y'_k \sin(i_k) \cos(\Omega_k) + x_k \dot{\Omega}_k \\ y'_k \sin(i_k) + y'_k \dot{i}_k \cos(i_k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{\Omega}_{ie} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\Omega}_e & 0 \\ \dot{\Omega}_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

avec

- \mathbf{v}_i la vitesse du satellite i dans le repère ECEF
- $\mathbf{\Omega}_{ie}$ la vitesse angulaire du repère ECI par rapport au repère ECEF

A.2 Calcul de la latitude, de la longitude et de l'altitude

Soit x, y, z la position dans le repère ECEF dont on veut la latitude, la longitude et l'altitude. On donne les constantes

- $a=6378137$ m, le demi-grand axe de la Terre
- $b=6356752.3142$ m, le demi-petit axe de la Terre

dont on déduit l'excentricité de la Terre

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (\text{A.5})$$

Pour la suite du calcul, nous utilisons la méthode proposée dans [Farrell et Barth, 1999, Chap.2.23], qui offre une solution directe, non itérative, comparée aux solutions classiques

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{x^2 + y^2} & E^2 &= a^2 - b^2 \\ F &= 54b^2 z^2 & G &= p^2 + (1 - e^2)z^2 - e^2 E^2 \\ c &= \frac{e^4 F p^2}{G^3} & s &= \left(1 + c + \sqrt{c^2 + 2c}\right)^{1/3} \\ P &= \frac{F}{3\left(s + \frac{1}{s} + 1\right)^2 G^2} & Q &= \sqrt{1 + 2e^4 P} \\ r_0 &= -\frac{Pe^2 p}{1+Q} + \sqrt{0.5a^2 \left(1 + \frac{1}{Q}\right) - \frac{P(1-e^2)z^2}{Q(1+Q)} - 0.5Pp^2} \\ U &= \sqrt{(p - e^2 r_0)^2 + z^2} & V &= \sqrt{(p - e^2 r_0)^2 + (1 - e^2)z^2} \\ z_0 &= \frac{b^2 z}{aV} & e' &= \frac{a}{b} e \end{aligned}$$

dont on déduit finalement l'altitude h , la latitude ϕ et la longitude λ

$$h = U \left(1 - \frac{b^2}{aV}\right) \quad (\text{A.6})$$

$$\phi = \text{atan} \left(\frac{z + (e')^2 z_0}{p} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$\lambda = \text{atan2}(y, x). \quad (\text{A.8})$$

A.3 Calcul des angles d'azimut et d'élévation

Pour calculer les angles ψ_i et θ_i d'un satellite, on a besoin de la position du satellite (cf., A.1) ainsi que d'une position approchée de l'utilisateur dans le repère ECEF ainsi que la latitude et la longitude correspondantes (voir annexe A.2). On peut alors en déduire l'expression du vecteur \mathbf{a}_i dans le repère ECEF via (1.39), puis dans le repère local ENU, via (1.33)

$$\mathbf{a}_{i,\text{ENU}} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \lambda \sin \phi & -\sin \lambda \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \lambda \cos \phi & \sin \lambda \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix} \mathbf{a}_i. \quad (\text{A.9})$$

On en déduit finalement l'élévation θ_i et l'azimut ψ_i du satellite en regardant la figure 1.17 (et en se rappelant que $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$) [Groves, 2008a, Chap. 7.1.3]

$$\theta_i = \arcsin(a_{i,\text{ENU}}(3)) \quad (\text{A.10})$$

$$\psi_i = \text{atan2}(a_{i,\text{ENU}}(1), a_{i,\text{ENU}}(2)). \quad (\text{A.11})$$

A.4 L'effet Doppler

Le décalage fréquentiel est en réalité dû à l'effet Doppler Doppler [1842] et au fait que l'émetteur et le récepteur ont deux vecteurs vitesses différents (exemple classique d'une voiture avec sirène qui s'approche puis s'éloigne de nos oreilles : plus la voiture approche vers nous, plus le signal paraît aigu, et plus elle s'éloigne, plus celui-ci paraît grave). Nous avons

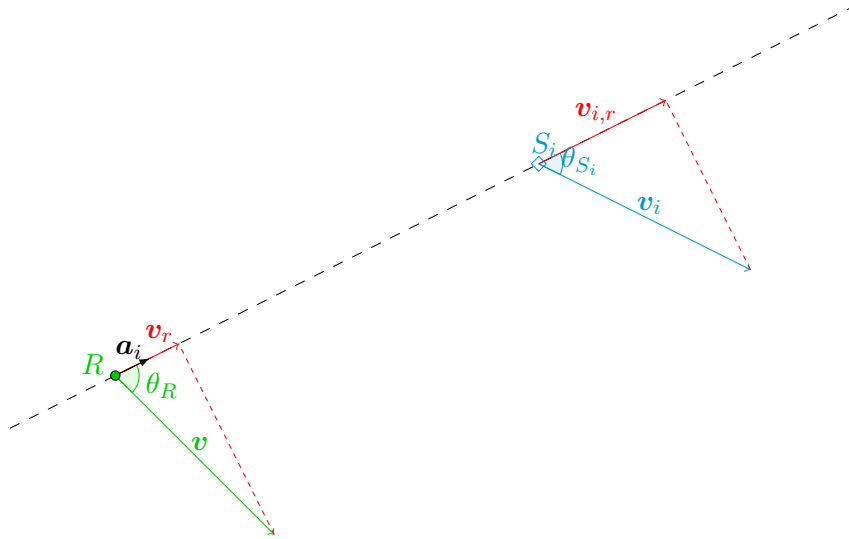


FIGURE A.1 – Représentation en deux dimensions pour l'illustration de l'effet Doppler

représenté le cas général en figure A.1, dans laquelle on a

- S_i et R respectivement la source du signal et le récepteur ;
- \mathbf{v}_i et \mathbf{v} respectivement la vitesse de la source et celle du récepteur ;
- v_{S_i} et v les normes respectives des précédents vecteurs ;
- \mathbf{a}_i le vecteur unitaire qui va du récepteur vers la source ;
- $\mathbf{v}_{S_i,r}$ et \mathbf{v}_r respectivement la vitesse radiale de la source et celle du récepteur, i.e. la projection de chacune des vitesses sur la droite (RS_i) ;

- $v_{i,r}$ et v_r les normes respectives des précédents vecteurs ;
- θ_{S_i} et θ_R les angles entre les vecteurs vitesse et la droite (RS_i), respectivement pour la source et le récepteur ;
- $\mathbf{c}_i = -c\mathbf{a}_i$ le vecteur vitesse de l'onde ($c_i^2 = c^2$).

Partons des équations (1.35) et (1.36)

$$d_i = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|_2 = c(t_R - t_{S_i}) \quad (\text{A.12})$$

avec t_{S_i} et t_R respectivement les dates d'émissions et de réception du signal. On a donc

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|_2^2 = c^2(t_R - t_{S_i})^2, \quad (\text{A.13})$$

soit en dérivant par rapport à t_R

$$\begin{aligned} & 2 \left[\frac{d}{dt_R} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^T \right] (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = 2c^2(t_R - t_{S_i}) \left(1 - \frac{dt_{S_i}}{dt_R}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\mathbf{v} - \frac{dt_{S_i}}{dt_R} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt_{S_i}} \right)^T \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{(t_R - t_{S_i})} = c^2 \left(1 - \frac{dt_{S_i}}{dt_R}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\mathbf{v} - \frac{dt_{S_i}}{dt_R} \mathbf{v}_i \right)^T \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{(t_R - t_{S_i})} = c^2 \left(1 - \frac{dt_{S_i}}{dt_R}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Notons que

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) &= -\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|_2 \mathbf{a}_i \\ &= -c(t_R - t_{S_i}) \mathbf{a}_i \quad \text{via (A.12)} \\ &= (t_R - t_{S_i}) \mathbf{c}_i \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

que l'on peut injecter dans (A.14)

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{v} - \frac{dt_{S_i}}{dt_R} \mathbf{v}_i \right)^T \mathbf{c}_i = c^2 \left(1 - \frac{dt_{S_i}}{dt_R}\right) \\ \Leftrightarrow & \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i - \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i \frac{dt_{S_i}}{dt_R} = c^2 - c^2 \frac{dt_{S_i}}{dt_R} \\ \Leftrightarrow & \frac{dt_{S_i}}{dt_R} (c^2 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i) = c^2 - \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i \\ \Leftrightarrow & \frac{dt_{S_i}}{dt_R} = \frac{c_i^2 - \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i}{c_i^2 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Il nous faut en plus tenir compte de la relativité restreinte et du facteur de Lorentz [MathPages](#)

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} \quad (\text{A.17})$$

où

- τ est le temps propre, i.e. le temps lié au référentiel en question ;
- $v(t)$ est la vitesse du référentiel.

Donc

$$\frac{d\tau_{S_i}}{d\tau_R} = \frac{dt_{S_i}}{dt_R} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{i,r}}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{c}\right)^2}}. \quad (\text{A.18})$$

Si on suppose que les vitesses $v_{i,r}$ et v_r ne varient pas au cours des intervalles de temps considérés, on peut en déduire que les temps dans les deux repères sont proportionnels

$$\frac{\tau_{S_i}}{\tau_R} = \frac{dt_{S_i}}{dt_R} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{i,r}}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{c}\right)^2}}, \quad (\text{A.19})$$

et la fréquence étant l'inverse de la période, on obtient finalement

$$\frac{f_R}{f_{S_i}} = \frac{\mathbf{c}_i^2 - \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i}{\mathbf{c}_i^2 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{i,r}}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{c}\right)^2}} \quad (\text{A.20})$$

En remarquant que $v_{i,r} = |\mathbf{v}_i^T \mathbf{a}_i| = |\mathbf{v}_i^T \frac{\mathbf{c}_i}{c}|$, et de même $v_r = |\mathbf{v}^T \frac{\mathbf{c}_i}{c}|$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{f_R}{f_{S_i}} &= \frac{\mathbf{c}_i^2 - \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i}{\mathbf{c}_i^2 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i}{c^2}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{c}_i}{c^2}\right)^2}} \\ &= \frac{\mathbf{c}_i^2 - \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i}{\mathbf{c}_i^2 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i} \frac{\sqrt{\mathbf{c}_i^4 - (\mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i)^2}}{\sqrt{\mathbf{c}_i^4 - (\mathbf{v}^T \mathbf{c}_i)^2}} \\ &= \frac{\mathbf{c}_i^2 - \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i}{\mathbf{c}_i^2 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i} \frac{\sqrt{(\mathbf{c}_i^2 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i)(\mathbf{c}_i^2 + \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i)}}{\sqrt{(\mathbf{c}_i^2 - \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i)(\mathbf{c}_i^2 + \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i)}} \\ &= \frac{\sqrt{\mathbf{c}_i^2 - \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i} \sqrt{\mathbf{c}_i^2 + \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i}}{\sqrt{\mathbf{c}_i^2 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i} \sqrt{\mathbf{c}_i^2 + \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i}} \\ &= \sqrt{\frac{(c^2 - \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i)(c^2 + \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i)}{(c^2 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i)(c^2 + \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i)}} \\ &= \sqrt{\frac{c^4 + c^2 \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i - c^2 \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i - (\mathbf{v}^T \mathbf{c}_i)(\mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i)}{c^4 + c^2 \mathbf{v}^T \mathbf{c}_i - c^2 \mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i - (\mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i)(\mathbf{v}^T \mathbf{c}_i)}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})^T \mathbf{c}_i \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^4} (\mathbf{v}^T \mathbf{c}_i)(\mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i)}{1 - (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})^T \mathbf{c}_i \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^4} (\mathbf{v}^T \mathbf{c}_i)(\mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i)}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})^T \mathbf{a}_i \frac{1}{c} - (\mathbf{v}^T \mathbf{c}_i)(\mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i) \frac{1}{c^2}}{1 + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})^T \mathbf{a}_i \frac{1}{c} - (\mathbf{v}^T \mathbf{c}_i)(\mathbf{v}_i^T \mathbf{c}_i) \frac{1}{c^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})^T \mathbf{a}_i \frac{1}{c} + o\left(\frac{1}{c}\right)}{1 + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})^T \mathbf{a}_i \frac{1}{c} + o\left(\frac{1}{c}\right)}}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Pour continuer, on pose $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}$, et on rappelle que pour x au voisinage de 0 et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

$$\begin{aligned} \frac{f_R}{f_{S_i}} &= \left(1 - \Delta \mathbf{v}^T \mathbf{a}_i \frac{1}{c} + o\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{1/2} \left(1 + \Delta \mathbf{v}^T \mathbf{a}_i \frac{1}{c} + o\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{-1/2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v}^T \mathbf{a}_i \frac{1}{c} + o\left(\frac{1}{c}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v}^T \mathbf{a}_i \frac{1}{c} + o\left(\frac{1}{c}\right)\right) \\ &= 1 - \Delta \mathbf{v}^T \mathbf{a}_i \frac{1}{c} + o\left(\frac{1}{c}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Le décalage Doppler est alors défini par $\Delta f = f_R - f_{S_i}$ et vaut

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_{S_i} \left(\frac{f_R}{f_{S_i}} - 1\right) \\ &= f_{S_i} \left(-\Delta \mathbf{v}^T \mathbf{a}_i \frac{1}{c} + o\left(\frac{1}{c}\right)\right) \\ &\approx -\Delta \mathbf{v}^T \mathbf{a}_i \frac{f_{S_i}}{c}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Dans notre cas d'application, si on néglige les erreurs sur la fréquence d'émission, on a alors $f_{S_i} = f_{L_1}$, et en posant $\lambda_{L_1} = \frac{c}{f_{L_1}}$ la longueur d'onde du signal, on obtient

$$-\lambda_{L_1} \Delta f = \Delta \mathbf{v}^T \mathbf{a}_i. \quad (\text{A.24})$$

Si l'on veut exprimer le décalage Doppler mesuré par le récepteur, il faut tenir compte de sa dérive d'horloge, i.e. $f_{\text{mesurée}} = f_{\text{réelle}}(1 + \Delta\dot{\tau})$ et donc

$$\begin{aligned} \Delta f_{\text{mesurée}} &= f_{\text{mesurée}} - f_{S_i} \\ &= f_{\text{réelle}} + \Delta\dot{\tau} f_{\text{réelle}} - f_{S_i} \\ &= \Delta f_{\text{réelle}} + \Delta\dot{\tau} f_{\text{réelle}}, \end{aligned}$$

donc on peut réécrire A.24 pour le décalage Doppler mesuré par un récepteur GNSS

$$-\lambda_{L_1} \Delta f_i - \lambda \Delta\dot{\tau} f_R = \Delta \mathbf{v}^T \mathbf{a}_i \quad (\text{A.25})$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} -\lambda_{L_1} \Delta f_i &= \Delta \mathbf{v}^T \mathbf{a}_i + c \Delta\dot{\tau} \frac{f_R}{f_{L_1}} \\ &= \Delta \mathbf{v}^T \mathbf{a}_i + c \Delta\dot{\tau} (1 + o(1)) \\ &\approx \Delta \mathbf{v}^T \mathbf{a}_i + c \Delta\dot{\tau} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

qui n'est autre que l'expression de la dérivée de la pseudodistance séparant le récepteur et le satellite, donnée dans 1.46. Donc finalement

$$-\lambda_{L_1} \Delta f_i = \dot{\rho}_i \quad (\text{A.27})$$

A.5 Modèle de Klobuchar pour le délai ionosphérique

Pour estimer l'erreur due à l'ionosphère à l'aide du modèle de Klobuchar [Klobuchar \[1987\]](#), on a besoin en entrée de

- ϕ_u , la latitude approximative de l'utilisateur (cf.,annexe A.2)
- λ_u , la longitude approximative de l'utilisateur (cf.,annexe A.2)
- θ_i , l'angle d'élévation du satellite (cf.,annexe 1.3.2.2)
- ψ_i , l'angle d'azimut du satellite (cf.,annexe 1.3.2.2)
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, les paramètres pour interpoler l'amplitude du délai vertical (contenus dans les éphémérides)
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, les paramètres pour interpoler la période du délai vertical (contenus dans les éphémérides)
- t_R , la date à laquelle on veut calculer le délai ionosphérique

On peut alors appliquer le modèle de Klobuchar, et on calcule

- $\Psi = \frac{0.0137}{\theta_i/\pi + 0.11} - 0.022$, l'angle centré sur la Terre entre l'utilisateur et le point de percée ionosphérique (en semi-cercles²)
- $\phi_I = \frac{\phi_u}{\pi} + \Psi \cos \psi_i$, la latitude du point de percée ionosphérique (en semi-cercles). Si $\phi_I > 0.416$, alors on prend $\phi_I = 0.416$, et si $\phi_I < -0.416$, alors on prend $\phi_I = -0.416$
- $\lambda_I = \frac{\lambda_u}{\pi} + \frac{\Psi \sin \psi_i}{\cos \pi \phi_I}$, la longitude du point de percée ionosphérique (en semi-cercles)
- $\phi_m = \phi_I + 0.064 \cos(\pi(\lambda_I - 1.617))$, la latitude géomagnétique (en semi-cercles)

2. 1 semi-cercle = π rad.

- $A = \sum_{n=0}^3 \alpha_n \phi_m^n$ si $A \geq 0$, sinon $A = 0$, l'amplitude du délai ionosphérique (en secondes)
- $P = \sum_{n=0}^3 \beta_n \phi_m^n$ si $P > 72000$, sinon $P = 72000$, la période du délai ionosphérique (en secondes)
- $t = 4.32 \times 10^4 \lambda_I + t_R$, le temps local (en secondes). Si $t > 86400$, alors on prend $t = t - 86400$. Si $t < 0$, alors on prend $t = t + 86400$
- $x = \frac{2\pi(t-50400)}{P}$, la phase du délai ionosphérique (sans unité)
- $F = 1 + 16 \left(0.53 - \frac{\theta_i}{\pi}\right)^3$, le coefficient d'inclinaison (sans unité)

dont on déduit finalement une estimation du délai ionosphérique sur le satellite i

$$\hat{\delta}t_{\text{iono},i} = \begin{cases} F \times \left[5 \times 10^{-9} + A \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right] & \text{si } |x| > 1.57 \\ 5 \times 10^{-9} F & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

et de l'erreur de pseudodistance correspondante

$$\hat{\varepsilon}_{\text{iono},i} = \begin{cases} cF \times \left[5 \times 10^{-9} + A \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right] & \text{si } |x| > 1.57 \\ c5 \times 10^{-9} F & \text{sinon} \end{cases} . \quad (\text{A.29})$$

Pour l'impact sur la mesure de Doppler, il suffit de dériver l'équation précédente, comme expliqué dans Zhang [2007], en supposant que les différents angles varient peu au cours du temps, et ont donc une dérivée nulle, et en notant $\dot{x} = \frac{2\pi}{P}$

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\text{iono},i} &= \begin{cases} cFA \left(-\dot{x}x + \dot{x}\frac{x^3}{6}\right) & \text{si } |x| > 1.57 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} cFA \frac{2\pi}{P} \left(-x + \frac{x^3}{6}\right) & \text{si } |x| > 1.57 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

A.6 Estimation de l'erreur due à la troposphère

Comme expliqué à la partie 1.4.5, nous allons utiliser le modèle présenté dans Leandro et al. [2006] pour les valeurs au zénith, que nous projetterons avec la fonction de mapping présentée dans Niell [1996] (N.B., les expressions des fonctions de mapping sont plus explicites sur la page *Navipedia* correspondante https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Mapping_of_Niell)

A.6.1 Préliminaires : calcul des paramètres météorologiques

Il nous faut dans un premier temps interpoler les différents paramètres météorologiques en fonction de la latitude ϕ de l'utilisateur (cf., annexe A.2)

- la pression P
- la température T
- la pression de vapeur saturante de l'eau, e
- le taux d'effondrement de la température β
- le facteur d'amplitude de la pression de vapeur saturante de l'eau λ .

Pour cela, on interpole chacune des valeurs moyennes à l'aide du tableau A.1 et de la formule

$$m_X(\phi) = \begin{cases} m_X(15) & \text{si } \phi \leq 15 \\ m_X(\phi_i) + \frac{m_X(\phi_{i+1}) - m_X(\phi_i)}{15} (\phi - \phi_i) & \text{si } 15 < \phi < 75 \\ m_X(75) & \text{si } \phi \geq 75 \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

où

- $m_X(\phi)$ est la moyenne du paramètre X pour la latitude ϕ en degré, avec $X \in \{P, T, e, \beta, \lambda\}$
- si $15 < \phi < 75$, alors i est tel que $\phi_i < \phi < \phi_{i+1}$

et on interpole chacune des amplitudes à l'aide du tableau A.2 et de la formule

$$a_X(\phi) = \begin{cases} a_X(15) & \text{si } \phi \leq 15 \\ a_X(\phi_i) + \frac{m_X(\phi_{i+1}) - a_X(\phi_i)}{15}(\phi - \phi_i) & \text{si } 15 < \phi < 75 \\ a_X(75) & \text{si } \phi \geq 75 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

où

- $a_X(\phi)$ est l'amplitude du paramètre X pour la latitude ϕ en degré, avec $X \in \{P, T, e, \beta, \lambda\}$
- si $15 < \phi < 75$, alors i est tel que $\phi_i < \phi < \phi_{i+1}$.

| ϕ (degrees) | P (mbar) | T (K) | e (mbar) | β (K.m ⁻¹) | λ (pas d'unité) |
|------------------|------------|---------|------------|------------------------------|-------------------------|
| 15 | 1013.25 | 299.65 | 26.31 | 6.30×10^{-3} | 2.77 |
| 30 | 1017.25 | 294.15 | 21.79 | 6.05×10^{-3} | 3.15 |
| 45 | 1015.75 | 283.15 | 11.66 | 5.58×10^{-3} | 2.57 |
| 60 | 1011.75 | 272.15 | 6.78 | 5.39×10^{-3} | 1.81 |
| 75 | 1013.00 | 263.65 | 4.11 | 4.53×10^{-3} | 1.55 |

TABLEAU A.1 – Tableau des valeurs moyennes pour les différents paramètres nécessaires à leur interpolation.

| ϕ (degrees) | P (mbar) | T (K) | e (mbar) | β (K.m ⁻¹) | λ (pas d'unité) |
|------------------|------------|---------|------------|------------------------------|-------------------------|
| 15 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 30 | -3.75 | 7.00 | 8.85 | 0.25×10^{-3} | 0.33 |
| 45 | -2.25 | 11.00 | 7.24 | 0.3×10^{-3} | 0.46 |
| 60 | -1.75 | 15.00 | 5.36 | 0.81×10^{-3} | 0.74 |
| 75 | -0.50 | 14.50 | 3.39 | 0.62×10^{-3} | 0.30 |

TABLEAU A.2 – Tableau des amplitudes pour les différents paramètres nécessaires à leur interpolation.

Enfin, chaque paramètre est interpolé par

$$X(\phi) = m_X(\phi) - a_X(\phi) \cos\left((d - 28) \frac{2\pi}{362.25}\right) \quad (\text{A.33})$$

où d est le jour de l'année.

A.6.2 Calcul du délai troposphérique

Il faut définir plusieurs constantes nécessaires au calcul de délai troposphérique

- $R = 287.054 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, la constante des gaz parfaits
- $g_m = 9.784(1 - 2.66 \times 10^{-3} \cos(2\phi) - 2.8 \times 10^{-7}h)\text{m.s}^{-2}$, où h désigne l'altitude du récepteur, cf. (A.6), l'accélération de la gravité dans la colonne centroïde de l'atmosphère
- $g = 9.80665 \text{ m.s}^{-2}$, l'accélération de la gravité sur Terre
- $k_1 = 77.60 \text{ K.mbar}^{-1}$, $k'_2 = 16.6 \text{ K.mbar}^{-1}$ et $k_3 = 377600 \text{ K}^2.\text{mbar}^{-1}$ sont des constantes de réfractivité.
- $T_m = T \left(1 - \frac{\beta R}{g_m(\lambda+1)}\right) \text{ K}$, la température moyenne de la vapeur d'eau

On peut alors ensuite les composantes hydrostatique (*wet*) et non-hydrostatique (*dry*) du délai troposphérique au zénith à l'altitude 0

$$T_{0,\text{dry}}(\phi) = \frac{10^{-6}k_1R}{g_m}P \quad (\text{A.34})$$

$$T_{0,\text{wet}}(\phi) = \frac{10^{-6}(T_mk'_2 + k_3)R}{(\lambda + 1)g_m - \beta R} \frac{e}{T} \quad (\text{A.35})$$

et en déduire leur valeur à l'altitude h

$$T_{\text{dry}}(\phi, h) = T_{0,\text{dry}}(\phi) \left(1 - \frac{\beta h}{T}\right)^{\frac{g}{R\beta}} \quad (\text{A.36})$$

$$T_{\text{wet}}(\phi, h) = T_{0,\text{wet}}(\phi) \left(1 - \frac{\beta h}{T}\right)^{\frac{(\lambda+1)g}{R\beta} - 1}. \quad (\text{A.37})$$

Il ne reste plus qu'à projeter ces valeurs à l'aide d'une fonction de mapping, comme celle de [Niell \[1996\]](#). Son expression peut paraître plus compliquée que d'autres fonctions de mapping, mais contrairement à ces dernières, celle-ci permet d'estimer correctement le délai troposphérique à de faibles valeurs d'élévation (jusqu'à 3 degrés), ce qui convient mieux à notre étude. Ces fonctions de mapping dépendent de plusieurs paramètres

- a_d, b_d, c_d pour l'hydrostatique
- a_{ht}, b_{ht}, c_{ht} pour un terme correctif de l'hydrostatique
- a_w, b_w, c_w pour la non hydrostatique

Les premiers sont estimés de même que les paramètres météorologiques, à l'aide des équations (A.31), (A.32), (A.33) et de la table A.3. Les deuxièmes sont constants

$$a_{ht} = 2.53 \times 10^{-5} \quad b_{ht} = 5.49 \times 10^{-3} \quad c_{ht} = 1.14 \times 10^{-3} \quad (\text{A.38})$$

et les derniers sont interpolés linéairement, comme pour les équations (A.31) ou (A.32), avec les coefficients de la table A.4. On définit ensuite les fonctions

| Moyenne | | | |
|----------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| ϕ (degré) | a_w | b_w | c_w |
| 15 | 1.2769934×10^{-3} | 2.9153695×10^{-3} | 62.610505×10^{-3} |
| 30 | 1.2683230×10^{-3} | 2.9152299×10^{-3} | 62.837393×10^{-3} |
| 45 | 1.2465397×10^{-3} | 2.9288445×10^{-3} | 63.721774×10^{-3} |
| 60 | 1.2196049×10^{-3} | 2.9022565×10^{-3} | 63.824265×10^{-3} |
| 75 | 1.2045996×10^{-3} | 2.9024912×10^{-3} | 64.258455×10^{-3} |
| Amplitude | | | |
| ϕ (degré) | a_w | b_w | c_w |
| 15 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 30 | 1.2709626×10^{-5} | 2.1414979×10^{-5} | 9.0128400×10^{-5} |
| 45 | 2.6523662×10^{-5} | 3.0160779×10^{-5} | 4.3497037×10^{-5} |
| 60 | 3.4000452×10^{-5} | 7.2562722×10^{-5} | 84.795348×10^{-5} |
| 75 | 4.1202191×10^{-5} | 11.723375×10^{-5} | 170.37206×10^{-5} |

TABLEAU A.3 – Tableau des moyennes amplitudes pour les paramètres de la fonction de mapping hydrostatique.

$$m(E, a, b, c) = \frac{1 + \frac{a}{1 + \frac{b}{1+c}}}{\sin E + \frac{a}{\sin E + \frac{b}{\sin E + c}}} \quad (\text{A.39})$$

$$\Delta m(E, H) = \left(\frac{1}{\sin E} - m(\theta_i, a_{ht}, b_{ht}, c_{ht}) \right) \quad (\text{A.40})$$

| ϕ (degré) | a_d | b_d | c_d |
|----------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 15 | 5.8021897×10^{-4} | 1.4275268×10^{-3} | 4.3472961×10^{-2} |
| 30 | 5.6794847×10^{-4} | 1.5138625×10^{-3} | 4.6729510×10^{-2} |
| 45 | 5.8118019×10^{-4} | 1.4572752×10^{-3} | 4.3908931×10^{-2} |
| 60 | 5.9727542×10^{-4} | 1.5007428×10^{-3} | 4.4626982×10^{-2} |
| 75 | 6.1641693×10^{-4} | 1.7599082×10^{-3} | 5.4736038×10^{-2} |

TABLEAU A.4 – Tableau des coefficients d'interpolation pour les paramètres de la fonction de mapping non-hydrostatique.

avec lesquels on peut finalement exprimer les fonctions de mapping pour les deux composantes hydrostatique et non-hydrostatique

$$M_{\text{dry}}(\theta_i, h) = m(\theta_i, a_d, b_d, c_d) + \Delta m(\theta_i, h) \quad (\text{A.41})$$

$$M_{\text{wet}}(\theta_i) = m(\theta_i, a_w, b_w, c_w). \quad (\text{A.42})$$

On peut alors donner l'expression de l'estimation du délai troposphérique

$$\hat{\delta}t_{\text{tropo},i} = \frac{1}{c} \left(M_{\text{dry}}(\theta_i, h) T_{\text{dry}}(\phi, h) + M_{\text{wet}}(\theta_i) T_{\text{wet}}(\phi, h) \right) \quad (\text{A.43})$$

et estimer l'impact de ce dernier sur l'erreur de pseudodistance

$$\hat{\epsilon}_{\text{tropo},i} = M_{\text{dry}}(\theta_i, h) T_{\text{dry}}(\phi, h) + M_{\text{wet}}(\theta_i) T_{\text{wet}}(\phi, h) \quad (\text{A.44})$$

Pour l'effet sur la mesure de pseudovitesse, la dérivée de l'expression précédente est donnée dans [Simsky et Boon \[2003\]](#), cependant, son expression est assez compliquée, et comme ce délai varie lentement, son approximation de Taylor au premier degré suffit, i.e., on prend

$$\hat{\epsilon}_{\text{tropo},i}(t) = \frac{1}{\Delta t} (\hat{\epsilon}_{\text{tropo},i}(t) - \hat{\epsilon}_{\text{tropo},i}(t-1)) \quad (\text{A.45})$$

Annexe B

Annexes du Chapitre 2

B.1 Autres campagnes de mesure

B.1.1 Ublox plus récent

Le méthode a été testée avec un récepteur plus récent Ublox M8T. Ce récepteur fournit des résultats nettement meilleurs que le récepteur AEK-4T étudié plus tôt, et la différence entre les deux méthodes (la méthode récepteur et la méthode proposée) est nettement plus marquée (la solution récepteur est bien meilleure).

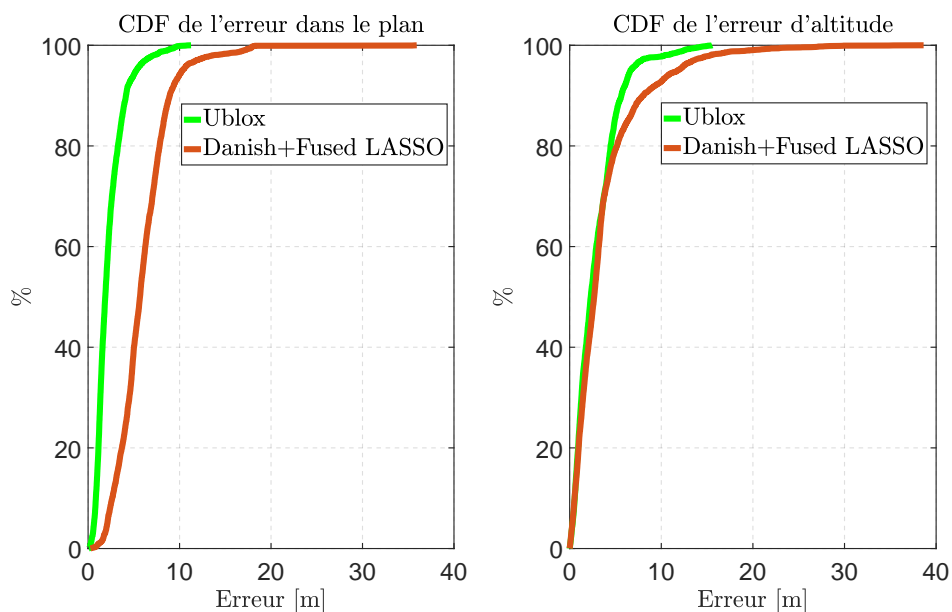


FIGURE B.1 – CDFs pour la méthode proposée et la solution constructeur.



FIGURE B.2 – Illustration des trajectoires pour le récepteur M8T.

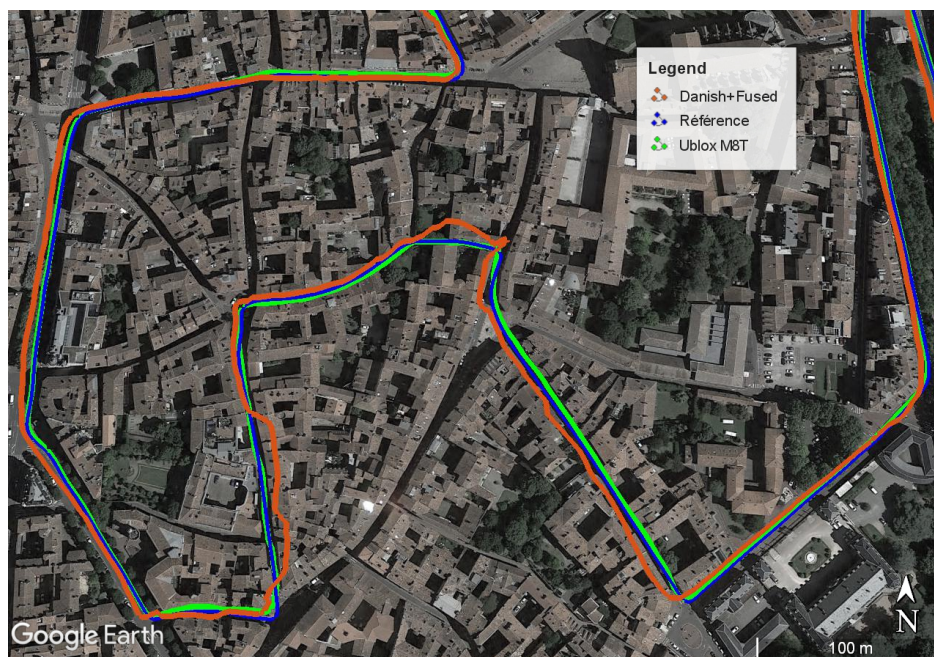


FIGURE B.3 – Illustration des trajectoires pour le récepteur M8T.

B.1.2 Smartphone

Le méthode a été testée avec des mesures smartphones. On compare alors le traitement des erreurs avec et sans détection/estimation de multitrajet par méthode parcimonieuse.

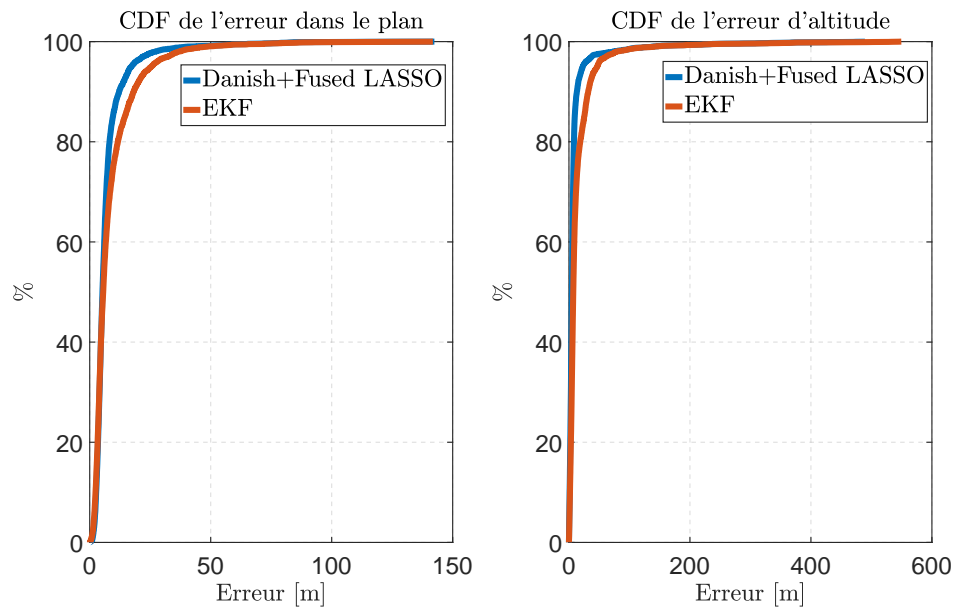


FIGURE B.4 – CDFs pour la méthode proposée et la solution constructeur.



FIGURE B.5 – Illustration des trajectoires pour le smartphone.



FIGURE B.6 – Illustration des trajectoires pour le smartphone.

B.2 Exemple de biais multitrajet pour un discriminateur double delta

B.2.1 Absence de multitrajets : signal LOS, *Line Of Sight*

Si l'on suppose que l'on est en environnement dégagé (absence de multitrajets), que la démodulation est correctement effectuée, et que l'on néglige l'influence du message de navigation, le signal émis par un satellite s reçu par le récepteur à l'instant t peut s'écrire [Giremus \[2005\]](#); [Soubielle et al. \[2002\]](#)

$$s(t) = A(t)c(t - \tau) + b(t) \quad (\text{B.1})$$

avec

- $A(t)$ l'amplitude du signal;
- $c(t)$ est un code pseudo-aléatoire (orthogonal);
- τ est la durée durant laquelle l'onde a traversé le canal de propagation (que l'on appellera dans la suite délai de propagation);
- $b(t)$ est le bruit.

L'autocorrélation de $c(t)$ est donnée par la fonction $R_c(\tau)$ donnée par [Giremus \[2005\]](#); [Soubielle et al. \[2002\]](#)

$$\begin{aligned} R_c(\tau) &= \frac{1}{T_m} \int_{T_m} c(t)c(t - \tau) dt \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{M+1}{M} \left| \frac{\tau}{T} \right| \simeq 1 - \left| \frac{\tau}{T} \right| & , \text{ pour } |\tau| \leq T \\ -\frac{1}{M} \simeq 0 & , \text{ pour } |\tau| > T \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où

- T est la durée d'un symbole du code ($T \simeq 977,5$ ns);
- M est le nombre de symboles composant une trame de code ($M = 1023$);
- $T_m = MT$ est la durée d'une trame de code ($T_m = 1$ ms).

L'intercorrélation de $s(t)$ et de $c(t)$ est donnée par la fonction $R_{s,c}$ donnée par [Giremus \[2005\]](#)

$$R_{s,c}(\tau) = \frac{1}{T_m} \int_{T_m} s(t)c(t-\tau)dt. \quad (\text{B.3})$$

On regarde la corrélation entre le signal reçu et une réplique de code à un délai estimé $\hat{\tau}$, en supposant que l'amplitude A est constante, au moins sur chaque intervalle d'intégration [Soubielle et al. \[2002\]](#)

$$\begin{aligned} R_{s,c}(\hat{\tau}) &= \frac{1}{T_m} \int_{T_m} s(t)c(t-\hat{\tau})dt \\ &= \frac{1}{T_m} \int_{T_m} [A(t)c(t-\tau) + b(t)]c(t-\hat{\tau})dt \\ &= A \frac{1}{T_m} \int_{T_m} c(t-\tau)c(t-\hat{\tau})dt + \frac{1}{T_m} \int_{T_m} b(t)c(t-\hat{\tau})dt \\ &= AR_c(\tau - \hat{\tau}) + R_{b,c}(\hat{\tau}). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

On calcule maintenant les corrélations nécessaires au discriminateur $\Delta\Delta$ [McGraw et Braash \[1999\]](#)

$$E1 = R_{s,c}(\hat{\tau} + \varepsilon) = AR_c(\tau - \hat{\tau} - \varepsilon) + R_{b,c}(\hat{\tau} + \varepsilon) \simeq \Phi \left(A - A \frac{|\tau - \hat{\tau} - \varepsilon|}{T} \right) + R_{b,c}(\hat{\tau} + \varepsilon) \quad (\text{B.5})$$

$$E2 = R_{s,c}(\hat{\tau} + 2\varepsilon) = AR_c(\tau - \hat{\tau} - 2\varepsilon) + R_{b,c}(\hat{\tau} + 2\varepsilon) \simeq \Phi \left(A - A \frac{|\tau - \hat{\tau} - 2\varepsilon|}{T} \right) + R_{b,c}(\hat{\tau} + 2\varepsilon) \quad (\text{B.6})$$

$$L1 = R_{s,c}(\hat{\tau} - \varepsilon) = AR_c(\tau - \hat{\tau} + \varepsilon) + R_{b,c}(\hat{\tau} - \varepsilon) \simeq \Phi \left(A - A \frac{|\tau - \hat{\tau} + \varepsilon|}{T} \right) + R_{b,c}(\hat{\tau} - \varepsilon) \quad (\text{B.7})$$

$$L2 = R_{s,c}(\hat{\tau} - 2\varepsilon) = AR_c(\tau - \hat{\tau} + 2\varepsilon) + R_{b,c}(\hat{\tau} - 2\varepsilon) \simeq \Phi \left(A - A \frac{|\tau - \hat{\tau} + 2\varepsilon|}{T} \right) + R_{b,c}(\hat{\tau} - 2\varepsilon) \quad (\text{B.8})$$

où $\varepsilon = d \times T$ et la fonction Φ est définie par $\Phi : x \mapsto xH(x)$ où H désigne la fonction de Heaviside ($H(x) = 0$ si $x < 0$ et 1 sinon). Le discriminateur est alors donné par [Irsigler \[2008\]](#); [McGraw et Braash \[1999\]](#)

$$\begin{aligned} D_{\Delta\Delta} &= (E1 - L1) - \frac{1}{2}(E2 - L2) \\ &= \left[\Phi \left(A - A \frac{|\tau - \hat{\tau} - \varepsilon|}{T} \right) + R_{b,c}(\hat{\tau} + \varepsilon) - \Phi \left(A - A \frac{|\tau - \hat{\tau} + \varepsilon|}{T} \right) - R_{b,c}(\hat{\tau} - \varepsilon) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\Phi \left(A - A \frac{|\tau - \hat{\tau} - 2d|}{T} \right) + R_{b,c}(\hat{\tau} + 2d) - \Phi \left(A - A \frac{|\tau - \hat{\tau} + 2d|}{T} \right) - R_{b,c}(\hat{\tau} - 2d) \right] \\ &= \left[A \left(\Phi \left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} - \varepsilon|}{T} \right) - \Phi \left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} + \varepsilon|}{T} \right) \right) + R_{b,c}(\hat{\tau} + \varepsilon) - R_{b,c}(\hat{\tau} - \varepsilon) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[A \left(\Phi \left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} - 2d|}{T} \right) - \Phi \left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} + 2d|}{T} \right) \right) + R_{b,c}(\hat{\tau} + 2d) - R_{b,c}(\hat{\tau} - 2d) \right] \end{aligned}$$

soit en négligeant l'impact du bruit

$$\begin{aligned} D_{\Delta\Delta} &= A \left[\Phi \left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} - \varepsilon|}{T} \right) - \Phi \left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} + \varepsilon|}{T} \right) \right] \\ &\quad - \frac{A}{2} \left[\Phi \left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} - 2\varepsilon|}{T} \right) - \Phi \left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} + 2\varepsilon|}{T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

B.2.2 Présence de multitrajets : signaux NLOS, *Non Line Of Sight*

Maintenant, nous supposons la présence de signaux réfléchis en plus du signal direct. Un signal réfléchi sera traité de la même manière que le signal LOS (cf. partie B.2.1), à la différence que le délai de propagation est différent de τ (on le note θ_k pour le k -ième multitrajet), l'amplitude du signal est différente (on la note a_k pour le k -ième multitrajet), la fréquence du signal est différente (on la note f_k pour le k -ième multitrajet) et un déphasage est induit (que l'on note ϕ_k pour le k -ième multitrajet). On a donc pour le signal émis par un satellite en présence de P multitrajets [Giremus \[2005\]](#); [Soubielle et al. \[2002\]](#)

$$s(t) = A(t)c(t - \tau) + \sum_{k=1}^P a_k(t)c(t - \theta_k)e^{2\pi j\Delta f_k + j\Delta\phi_k} + b(t)$$

où $\Delta f_k = (f_k - f_d)$ est l'écart entre les fréquences Doppler du signal direct et d'un signal réfléchi et $\Delta\phi_k = \phi_k - \phi$ la différence de phase. Dans la suite de ce rapport, nous nous consacrerons sur la présence au plus d'un seul multitrajet (i.e, $P = 0$ ou 1). On obtient alors, en oubliant les indices k des multitrajets, en supposant la démodulation parfaite et en considérant les amplitudes constantes [Giremus \[2005\]](#)

$$\begin{aligned} s(t) &= Ac(t - \tau) + ac(t - \theta) \cos(\Delta ft + \Delta\phi) + b(t) \\ &= Ac(t - \tau) + \alpha Ac(t - \theta) \cos(\Delta ft + \Delta\phi) + b(t) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

où $\alpha = \frac{a}{A}$ est le rapport entre l'amplitude du multitrajet et celle du signal direct. Il nous faut maintenant réécrire l'équation (B.4) avec ce nouveau modèle

$$\begin{aligned} R_{s,c}(\hat{\tau}) &= \frac{1}{T_m} \int_{T_m} s(t)c(t - \hat{\tau})dt \\ &= \frac{1}{T_m} \int_{T_m} [Ac(t - \tau) + \alpha Ac(t - \theta) \cos(\Delta ft + \Delta\phi) + b(t)]c(t - \hat{\tau})dt \\ &= \frac{A}{T_m} \int_{T_m} c(t - \tau)c(t - \hat{\tau})dt + \frac{\alpha A}{T_m} \int_{T_m} c(t - \theta)c(t - \hat{\tau}) \cos(\Delta ft + \Delta\phi)dt + \frac{1}{T_m} \int_{T_m} b(t)c(t - \hat{\tau})dt. \end{aligned}$$

En supposant $\Delta f \ll 1$, on peut considérer le cosinus constant sur la durée T_m et le rentrer dans le terme α [Giremus \[2005\]](#)

$$R_{s,c}(\hat{\tau}) = \underbrace{AR_c(\tau - \hat{\tau})}_{LOS} + \underbrace{\alpha AR_c(\theta - \hat{\tau})}_{NLOS} + R_{b,c}(\hat{\tau}). \quad (\text{B.11})$$

On en déduit les sorties de corrélateurs

$$\begin{aligned}
 E1 &= R_{s,c}(\hat{\tau} + \varepsilon) \\
 &= AR_c(\tau - \hat{\tau} - \varepsilon) + \alpha AR_c(\theta - \hat{\tau} - \varepsilon) + R_{b,c}(\hat{\tau} + \varepsilon) \\
 &\simeq A\Phi\left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} - \varepsilon|}{T}\right) + \alpha A\Phi\left(1 - \frac{|\theta - \hat{\tau} - \varepsilon|}{T}\right) + R_{b,c}(\hat{\tau} + \varepsilon)
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
 E2 &= R_{s,c}(\hat{\tau} + 2\varepsilon) \\
 &= AR_c(\tau - \hat{\tau} - 2\varepsilon) + \alpha AR_c(\theta - \hat{\tau} - 2\varepsilon) + R_{b,c}(\hat{\tau} + 2\varepsilon) \\
 &\simeq A\Phi\left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} - 2\varepsilon|}{T}\right) + \alpha A\Phi\left(1 - \frac{|\theta - \hat{\tau} - 2\varepsilon|}{T}\right) + R_{b,c}(\hat{\tau} + 2\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
 L1 &= R_{s,c}(\hat{\tau} - \varepsilon) \\
 &= AR_c(\tau - \hat{\tau} + \varepsilon) + \alpha AR_c(\theta - \hat{\tau} + \varepsilon) + R_{b,c}(\hat{\tau} - \varepsilon) \\
 &\simeq A\Phi\left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} + \varepsilon|}{T}\right) + \alpha A\Phi\left(1 - \frac{|\theta - \hat{\tau} + \varepsilon|}{T}\right) + R_{b,c}(\hat{\tau} - \varepsilon)
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
 L2 &= R_{s,c}(\hat{\tau} - 2\varepsilon) \\
 &= AR_c(\tau - \hat{\tau} + 2\varepsilon) + \alpha AR_c(\theta - \hat{\tau} + 2\varepsilon) + R_{b,c}(\hat{\tau} - 2\varepsilon) \\
 &\simeq A\Phi\left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} + 2\varepsilon|}{T}\right) + \alpha A\Phi\left(1 - \frac{|\theta - \hat{\tau} + 2\varepsilon|}{T}\right) + R_{b,c}(\hat{\tau} - 2\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

On en déduit la sortie du discriminateur en négligeant le bruit

$$\begin{aligned}
 D_{\Delta\Delta} &= (E1 - L1) - \frac{1}{2}(E2 - L2) \\
 &= A \left[\Phi\left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} - \varepsilon|}{T}\right) - \Phi\left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} + \varepsilon|}{T}\right) + \alpha \left(\Phi\left(1 - \frac{|\theta - \hat{\tau} - \varepsilon|}{T}\right) - \Phi\left(1 - \frac{|\theta - \hat{\tau} + \varepsilon|}{T}\right) \right) \right] \\
 &\quad - \frac{A}{2} \left[\Phi\left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} - 2\varepsilon|}{T}\right) - \Phi\left(1 - \frac{|\tau - \hat{\tau} + 2\varepsilon|}{T}\right) + \alpha \left(\Phi\left(1 - \frac{|\theta - \hat{\tau} - 2\varepsilon|}{T}\right) - \Phi\left(1 - \frac{|\theta - \hat{\tau} + 2\varepsilon|}{T}\right) \right) \right].
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

On a représenté sur la figure B.7 la sortie des différents discriminateurs sans multitrajet, puis la sortie de chacun deux en présence d'un multitrajet de retard $\theta = 0.3$ par rapport au signal LOS.

Pour aller plus loin, il faudrait regarder $\zeta_d : u \mapsto \Phi(1 - |u - d|) - \Phi(1 - |u + d|)$. Le terme de gauche est non nul pour $|u - d| \leq 1$ i.e $-1 + d \leq u \leq 1 + d$ et celui de droite pour $|u + d| \leq 1$ i.e $-1 - d \leq u \leq 1 - d$. On a donc

$$\zeta_d(u) = \begin{cases} -1 + |u + d| & \text{si } -1 - d \leq u \leq -1 + d \\ |u + d| - |u - d| & \text{si } -1 + d \leq u \leq 1 - d \\ 1 - |u - d| & \text{si } 1 - d \leq u \leq 1 + d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut même aller plus loin

$$\zeta_d(u) = \begin{cases} -1 - (u + d) & \text{si } -1 - d \leq u \leq -1 + d \\ -(u + d) + (u - d) & \text{si } -1 + d \leq u \leq -d \\ (u + d) + (u - d) & \text{si } -d \leq u \leq d \\ (u + d) - (u - d) & \text{si } d \leq u \leq 1 - d \\ -1 - (u + d) & \text{si } 1 - d \leq u \leq 1 + d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

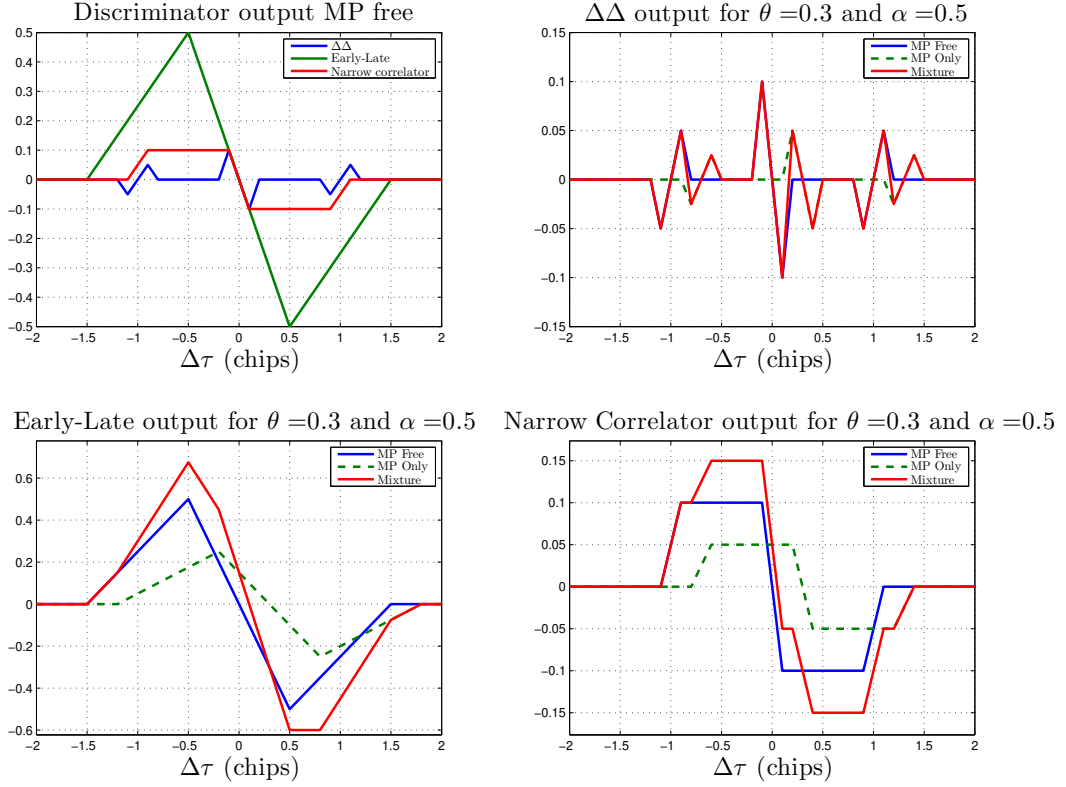


FIGURE B.7 – Représentation des différents discriminateurs en présence d'un multitrajet de retard $\theta = 0.3$.

soit

$$\zeta_d(u) = \begin{cases} -1 - u - d & \text{si } -1 - d \leq u \leq -1 + d \\ -2d & \text{si } -1 + d \leq u \leq -d \\ 2u & \text{si } -d \leq u \leq d \\ 2d & \text{si } d \leq u \leq 1 - d \\ 1 - u + d & \text{si } 1 - d \leq u \leq 1 + d \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Une représentation de la fonction ζ_d est donnée en figure B.8.

On a finalement pour le discriminateur

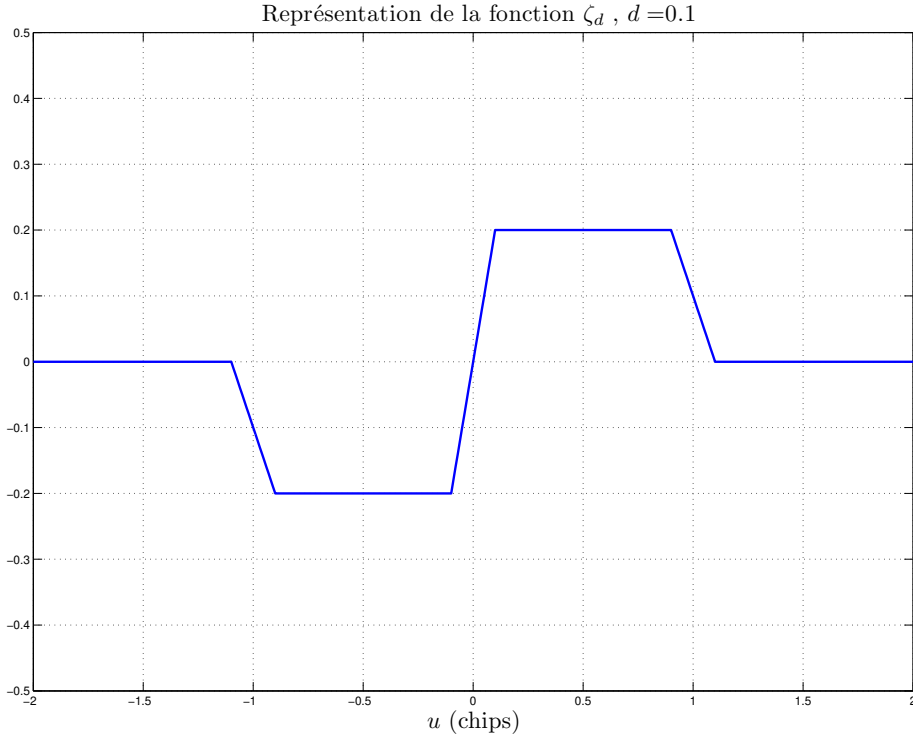
$$D_{\Delta\Delta} = \zeta_d\left(\frac{\tau - \hat{\tau}}{T}\right) + \alpha\zeta_d\left(\frac{\theta - \hat{\tau}}{T}\right) - \frac{1}{2} \left[\zeta_{2d}\left(\frac{\tau - \hat{\tau}}{T}\right) + \alpha\zeta_{2d}\left(\frac{\theta - \hat{\tau}}{T}\right) \right]. \quad (\text{B.18})$$

On pose alors $u = \frac{\tau - \hat{\tau}}{T}$ et $\delta = \frac{\theta - \hat{\tau}}{T}$ et on définit la fonction

$$\chi_\delta : [-2d, 2d] \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \zeta_d(u) + \alpha\zeta_d(u + \delta) - \frac{1}{2} [\zeta_{2d}(u) + \alpha\zeta_{2d}(u + \delta)] \quad (\text{B.19})$$

dont on va étudier les 0. Les valeurs de cette fonction dépendent des valeurs de δ . Au vu de (B.17), on a

$$\zeta_d(u + \delta) = \begin{cases} -1 - u - \delta - d & \text{si } -1 - d \leq u + \delta \leq -1 + d \\ -2d & \text{si } -1 + d \leq u + \delta \leq -d \\ 2(u + \delta) & \text{si } -d \leq u + \delta \leq d \\ 2d & \text{si } d \leq u + \delta \leq 1 - d \\ 1 - u - \delta + d & \text{si } 1 - d \leq u + \delta \leq 1 + d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$


 FIGURE B.8 – Représentation de la fonction ζ pour $d = 0.1$.

i.e

$$\zeta_d(u + \delta) = \begin{cases} -1 - u - \delta - d & \text{si } -1 - d - \delta \leq u \leq -1 + d - \delta \\ -2d & \text{si } -1 + d - \delta \leq u \leq -d - \delta \\ 2(u + \delta) & \text{si } -d - \delta \leq u \leq d - \delta \\ 2d & \text{si } d - \delta \leq u \leq 1 - d - \delta \\ 1 - u - \delta + d & \text{si } 1 - d - \delta \leq u \leq 1 + d - \delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Comme la fonction χ_δ est définie sur $[-2d; 2d]$ il nous faut comparer les différentes valeurs qui encadrent u dans (B.20) à $-2d$ et $2d$. On trouve donc que δ va varier dans $[0; 1 + 3d]$, qu'il nous faut découper en 6 intervalles :

- $[0; d]$ où l'on a $-1 + d - \delta < -2d \leq -d - \delta$ et $d - \delta < 2d \leq 1 - d - \delta$;
- $[d; 3d]$ où l'on a $-d - \delta \leq -2d \leq d - \delta$ et $d - \delta < 2d \leq 1 - d - \delta$;
- $[3d; 1 - 3d]$ où l'on a $d - \delta \leq -2d \leq 1 - d - \delta$ et $d - \delta < 2d \leq 1 - d - \delta$;
- $[1 - 3d; 1 - d]$ où l'on a $d - \delta \leq -2d \leq 1 - d - \delta$ et $1 - d - \delta \leq 2d \leq 1 + d - \delta$;
- $[1 - d; 1 + d]$ où l'on a $d - \delta \leq -2d \leq 1 - d - \delta$ et $1 + d - \delta \leq 2d$;
- $[1 + d; 1 + 3d]$ où l'on a $1 - d - \delta \leq -2d \leq 1 + d - \delta$ et $1 + d - \delta \leq 2d$.

On en déduit les valeurs de $\zeta_d(u + \delta)$ en fonction des valeurs de δ et de u

$$\begin{aligned}
\bullet \underline{\delta \in [0, d]} : \quad & \zeta_d(u + \delta) = -2d && \text{si } -2d \leq u \leq -d - \delta \\
& = 2(u + \delta) && \text{si } -d - \delta \leq u \leq d - \delta \\
& = 2d && \text{si } d - \delta \leq u \leq 2d \\
\bullet \underline{\delta \in [d, 3d]} : \quad & \zeta_d(u + \delta) = 2(u + \delta) && \text{si } -2d \leq u \leq d - \delta \\
& = 2d && \text{si } d - \delta \leq u \leq 2d \\
\bullet \underline{\delta \in [3d, 1 - 3d]} : \quad & \zeta_d(u + \delta) = 2d && \text{si } -2d \leq u \leq 2d \\
\bullet \underline{\delta \in [1 - 3d, 1 - d]} : \quad & \zeta_d(u + \delta) = 2d && \text{si } -2d \leq u \leq 1 - d - \delta \\
& = 1 - u + d - \delta && \text{si } 1 - d - \delta \leq u \leq 2d \\
\bullet \underline{\delta \in [1 - d, 1 + d]} : \quad & \zeta_d(u + \delta) = 2d && \text{si } -2d \leq u \leq 1 - d - \delta \\
& = 1 - u + d - \delta && \text{si } 1 - d - \delta \leq u \leq 1 + d - \delta \\
& = 0 && \text{si } 1 + d - \delta \leq u \leq 2d \\
\bullet \underline{\delta \in [1 + d, 1 + 3d]} : \quad & \zeta_d(u + \delta) = 1 - u + d - \delta && \text{si } -2d \leq u \leq 1 + d - \delta \\
& = 0 && \text{si } 1 + d - \delta \leq u \leq 2d
\end{aligned} \tag{B.21}$$

On regarde maintenant les valeurs de ζ_{2d} . Il est clair d'après (B.17) que

$$\zeta_{2d}(u) = 2u \text{ pour } -2d \leq u \leq 2d. \tag{B.22}$$

On a de plus

$$\zeta_{2d}(u + \delta) = \begin{cases} -1 - u - \delta - 2d & \text{si } -1 - 2d - \delta \leq u \leq -1 + 2d - \delta \\ -4d & \text{si } -1 + 2d - \delta \leq u \leq -2d - \delta \\ 2(u + \delta) & \text{si } -2d - \delta \leq u \leq 2d - \delta \\ 4d & \text{si } 2d - \delta \leq u \leq 1 - 2d - \delta \\ 1 - u - \delta + 2d & \text{si } 1 - 2d - \delta \leq u \leq 1 + 2d - \delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \tag{B.23}$$

On trouve donc que δ va varier dans $[0; 1 + 4d]$, qu'il nous faut découper en 4 intervalles :

- $[0; 4d]$ où l'on a $-2d - \delta < -2d \leq 2d - \delta$ et $2d - \delta < 2d \leq 1 - 2d - \delta$;
- $[4d; 1 - 4d]$ où l'on a $2d - \delta \leq -2d \leq 1 - 2d - \delta$ et $2d - \delta \leq 2d \leq 1 - 2d - \delta$;
- $[1 - 4d; 1]$ où l'on a $2d - \delta \leq -2d \leq 1 - 2d - \delta$ et $1 - 2d - \delta \leq 2d \leq 1 + 2d - \delta$;
- $[1; 1 + 4d]$ où l'on a $1 - 2d - \delta \leq -2d \leq 1 + 2d - \delta$ et $1 + 2d - \delta \leq 2d$.

Et finalement on a

$$\begin{aligned}
\bullet \underline{\delta \in [0, 4d]} : \quad & \zeta_{2d}(u + \delta) = 2(u + \delta) && \text{si } -2d \leq u \leq 2d - \delta \\
& = 4d && \text{si } 2d - \delta \leq u \leq 2d \\
\bullet \underline{\delta \in [4d, 1 - 4d]} : \quad & \zeta_{2d}(u + \delta) = 4d && \text{si } -2d \leq u \leq 2d \\
\bullet \underline{\delta \in [1 - 4d, 1]} : \quad & \zeta_{2d}(u + \delta) = 4d && \text{si } -2d \leq u \leq 1 - 2d - \delta \\
& = 1 - u - \delta + 2d && \text{si } 1 - 2d - \delta \leq u \leq 2d \\
\bullet \underline{\delta \in [1, 1 + 4d]} : \quad & \zeta_{2d}(u + \delta) = 1 - u - \delta + 2d && \text{si } -2d \leq u \leq 1 + 2d - \delta \\
& = 0 && \text{si } 1 + 2d - \delta \leq u \leq 2d.
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Tous les cas possibles et les intervalles d'étude correspondants sont répertoriés dans la table B.1 et les valeurs finales de χ_δ sont données dans la table B.2.

On en déduit les valeurs de δ qui annulent la sortie du discriminateur (table B.3).

| | |
|-----------------------------------|--|
| • $\delta \in [0, d]$: | $u \in [-2d; -d - \delta], [-d - \delta; -d], [-d; d - \delta], [d - \delta; d], [d; 2d - \delta], [2d - \delta; 2d];$ |
| • $\delta \in [d, 2d]$: | $u \in [-2d; -d], [-d; d - \delta], [d - \delta; 2d - \delta], [2d - \delta; d], [d; 2d];$ |
| • $\delta \in [2d, 3d]$: | $u \in [-2d; d - \delta], [d - \delta; -d], [-d; 2d - \delta], [2d - \delta; d], [d; 2d];$ |
| • $\delta \in [3d, 4d]$: | $u \in [-2d; 2d - \delta], [2d - \delta; -d], [-d; d], [d; 2d];$ |
| • $\delta \in [4d, 1 - 4d]$: | $u \in [-2d; -d], [-d; d], [d; 2d];$ |
| • $\delta \in [1 - 4d, 1 - 3d]$: | $u \in [-2d; -d], [-d; d], [d; 1 - 2d - \delta], [1 - 2d - \delta; 2d];$ |
| • $\delta \in [1 - 3d, 1 - 2d]$: | $u \in [-2d; -d], [-d; 1 - 2d - \delta], [1 - 2d - \delta; d], [d; 1 - d - \delta], [1 - d - \delta; 2d];$ |
| • $\delta \in [1 - 2d, 1 - d]$: | $u \in [-2d; -d], [-d; 1 - 2d - \delta], [1 - 2d - \delta; 1 - d - \delta], [1 - d - \delta; d], [d; 2d];$ |
| • $\delta \in [1 - d, 1]$: | $u \in [-2d; 1 - 2d - \delta], [1 - 2d - \delta; -d], [-d; 1 - d - \delta], [1 - d - \delta; d], [d; 1 + d - \delta], [1 + d - \delta; 2d];$ |
| • $\delta \in [1, 1 + d]$: | $u \in [-2d; 1 - d - \delta], [1 - d - \delta; -d], [-d; 1 + d - \delta], [1 + d - \delta; d], [d; 1 + 2d - \delta], [1 + 2d - \delta; 2d];$ |
| • $\delta \in [1 + d, 1 + 2d]$: | $u \in [-2d; -d], [-d; 1 + d - \delta], [1 + d - \delta; 1 + 2d - \delta], [1 + 2d - \delta; d], [d; 2d];$ |
| • $\delta \in [1 + 2d, 1 + 3d]$: | $u \in [-2d; 1 + d - \delta], [1 + d - \delta; -d], [-d; 1 + 2d - \delta], [1 + 2d - \delta; d], [d; 2d];$ |
| • $\delta \in [1 + 3d, 1 + 4d]$: | $u \in [-2d; 1 + 2d - \delta], [1 + 2d - \delta; -d], [-d; d], [1 + 2d - \delta; d], [d; 2d];$ |

 TABLEAU B.1 – Intervalles d'étude de la fonction χ_δ selon les valeurs de δ .

| δ | | | | | | |
|----------------------------|---|---|---|---|--|--|
| $[0, d]$ | $[-2d, -d - \delta]$ $-(1 + \alpha)2d - (\alpha + 1)u - \alpha\delta$ | $[-d - \delta, -d]$ $-2d + (\alpha - 1)u + \alpha\delta$ | $[-d, d - \delta]$ $u(\alpha + 1) + \alpha\delta$ | $[d - \delta, d]$ $(1 - \alpha)u + 2\alpha d - \alpha\delta$ | $[d, 2d - \delta]$ $2(\alpha + 1)d - (\alpha + 1)u - \alpha\delta$ | $[2d - \delta, 2d]$ $2d - u$ |
| $[d, 2d]$ | $[-2d, -d]$ $-2d + (\alpha - 1)u + \alpha\delta$ | $[-d, d - \delta]$ $u(\alpha + 1) + \alpha\delta$ | $[d - \delta, 2d - \delta]$ $(1 - \alpha)u + 2\alpha d - \alpha\delta$ | $[2d - \delta, d]$ u | $[d, 2d]$ $2d - u$ | |
| $[2d, 3d]$ | $[-2d, d - \delta]$ $-2d + (\alpha - 1)u + \alpha\delta$ | $[d - \delta, -d]$ $2(\alpha - 1)d - (\alpha + 1)u - \alpha\delta$ | $[-d, 2d - \delta]$ $(1 - \alpha)u + 2\alpha d - \alpha\delta$ | $[2d - \delta, d]$ u | $[d, 2d]$ $2d - u$ | |
| $[3d, 4d]$ | $[-2d, 2d - \delta]$ $2(\alpha - 1)d - (\alpha + 1)u - \alpha\delta$ | $[2d - \delta, -d]$ $-2d - u$ | $[-d, d]$ u | $[d, 2d]$ $2d - u$ | | |
| $[4d, 1 - 4d]$ | $[-2d, -d]$ $-2d - u$ | $[-d, d]$ u | $[d, 2d]$ $2d - u$ | | | |
| $[1 - 4d, 1 - 3d]$ | $[-2d, -d]$ $-2d - u$ | $[-d, d]$ u | $[d, 1 - 2d - \delta]$ $2d - u$ | $[1 - 2d - \delta, 2d]$ $(\alpha + 2)d + (\frac{\alpha - 2}{2})u - \alpha(\frac{1 - \delta}{2})$ | | |
| $[1 - 3d, 1 - 2d]$ | $[-2d, -d]$ $-2d - u$ | $[-d, 1 - 2d - \delta]$ u | $[1 - 2d - \delta, d]$ $\alpha d + (\frac{\alpha + 2}{2})u + \alpha(\frac{\delta - 1}{2})$ | $[d, 1 - d - \delta]$ $(\alpha + 2)d + (\frac{\alpha - 2}{2})u - \alpha(\frac{1 - \delta}{2})$ | $[1 - d - \delta, 2d]$ $2d - (\frac{\alpha + 2}{2})u + \alpha(\frac{1 - \delta}{2})$ | |
| $[1 - 2d, 1 - d]$ | $[-2d, -d]$ $-2d - u$ | $[-d, 1 - 2d - \delta]$ u | $[1 - 2d - \delta, 1 - d - \delta]$ $\alpha d + (\frac{\alpha + 2}{2})u + \alpha(\frac{\delta - 1}{2})$ | $[1 - d - \delta, d]$ $(\frac{2 - \alpha}{2})u + \alpha(\frac{1 - \delta}{2})$ | $[d, 2d]$ $2d - (\frac{\alpha + 2}{2})u + \alpha(\frac{1 - \delta}{2})$ | |
| $[1 - d, 1 - 2d - \delta]$ | $[-2d, 1 - 2d - \delta]$ $-2d - u$ | $[1 - 2d - \delta, -d]$ $(\alpha - 2)d + (\frac{\alpha - 2}{2})u + \alpha(\frac{\delta - 1}{2})$ | $[-d, 1 - d - \delta]$ $\alpha d + (\frac{\alpha + 2}{2})u + \alpha(\frac{\delta - 1}{2})$ | $[1 - d - \delta, d]$ $(\frac{2 - \alpha}{2})u + \alpha(\frac{1 - \delta}{2})$ | $[d, 1 + d - \delta]$ $2d - (\frac{\alpha + 2}{2})u + \alpha(\frac{1 - \delta}{2})$ | $[1 + d - \delta, 2d]$ $(2 - \alpha)d + (\frac{\alpha - 2}{2})u + \alpha(\frac{\delta - 1}{2})$ |
| $[1, 1 + d]$ | $[-2d, 1 - d - \delta]$ $(\alpha - 2)d + (\frac{\alpha - 2}{2})u + \alpha(\frac{\delta - 1}{2})$ | $[1 - d - \delta, -d]$ $-2d - (\frac{\alpha + 2}{2})u + \alpha(\frac{1 - \delta}{2})$ | $[-d, 1 + d - \delta]$ $(\frac{2 - \alpha}{2})u + \alpha(\frac{1 - \delta}{2})$ | $[1 + d - \delta, d]$ $-\alpha d + (\frac{\alpha + 2}{2})u + \alpha(\frac{\delta - 1}{2})$ | $[d, 1 + 2d - \delta]$ $(2 - \alpha)d + (\frac{\alpha - 2}{2})u + \alpha(\frac{\delta - 1}{2})$ | $[1 + 2d - \delta, 2d]$ $2d - u$ |
| $[1 + d, 1 + 2d]$ | $[-2d, -d]$ $-2d - (\frac{\alpha + 2}{2})u + \alpha(\frac{1 - \delta}{2})$ | $[-d, 1 + d - \delta]$ $(\frac{2 - \alpha}{2})u + \alpha(\frac{1 - \delta}{2})$ | $[1 + d - \delta, 1 + 2d - \delta]$ $-\alpha d + (\frac{\alpha + 2}{2})u + \alpha(\frac{\delta - 1}{2})$ | $[1 + 2d - \delta, d]$ u | $[d, 2d]$ $2d - u$ | |
| $[1 + 2d, 1 + 3d]$ | $[-2d, 1 + d - \delta]$ $-2d - (\frac{\alpha + 2}{2})u + \alpha(\frac{1 - \delta}{2})$ | $[1 + d - \delta, -d]$ $-(\alpha + 2)d + (\frac{\alpha - 2}{2})u + \alpha(\frac{\delta - 1}{2})$ | $[-d, 1 + 2d - \delta]$ $-\alpha d + (\frac{\alpha + 2}{2})u + \alpha(\frac{\delta - 1}{2})$ | $[1 + 2d - \delta, d]$ u | $[d, 2d]$ $2d - u$ | |
| $[1 + 3d, 1 + 4d]$ | $[-2d, 1 + 2d - \delta]$ $-(\alpha + 2)d + (\frac{\alpha - 2}{2})u + \alpha(\frac{\delta - 1}{2})$ | $[1 + 2d - \delta, -d]$ $-2d - u$ | $[-d, d]$ u | $[d, 2d]$ $2d - u$ | | |

TABLEAU B.2 – Valeurs la fonction χ_δ selon les valeurs de δ .

| | | | | | |
|----------|--|---|---|---|--|
| δ | $[0; d]$ | $[d; (\alpha + 1)d]$ | $[(\alpha + 1)d; 2d]$ | $[2d; (3 - \alpha)d]$ | $[(3 - \alpha)d; 3d]$ |
| u | $-\frac{\alpha}{\alpha+1}\delta$ $2d$ | $-\frac{\alpha}{\alpha+1}\delta$ $2d$ | $-\frac{\alpha}{1-\alpha}(2d - \delta)$ $2d$ | $-\frac{2d}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\delta$ $2d$ 0 | $2\frac{\alpha-1}{\alpha+1}d - \frac{\alpha}{\alpha+1}\delta$ $2d$ 0 |
| δ | $[3d; 4d]$ | $[4d; 1 - 4d]$ | $[1 - 4d; 1 - 2d]$ | $[1 - 2d; 1 - d]$ | $[1 - d; 1 - \frac{2-\alpha}{2}d]$ |
| u | $2\frac{\alpha-1}{\alpha+1}d - \frac{\alpha}{\alpha+1}\delta$ $2d$ 0 | $-2d$ $2d$ 0 | $-2d$ 0 | $-2d$ $\frac{\alpha}{\alpha+2}(1 - \delta - 2d)$ $\frac{1}{\alpha+2}(4d - \alpha(\delta - 1))$ | $-2d$ $-\frac{2\alpha}{\alpha+2}d + \frac{\alpha}{\alpha+2}(1 - \delta)$ $\frac{4d}{\alpha+2} + \frac{\alpha}{\alpha+2}(1 - \delta)$ |
| δ | $[1 - \frac{2-\alpha}{2}d; 1]$ | $[1; 1 + \frac{2-\alpha}{2}d]$ | $[1 + \frac{2-\alpha}{2}d; 1 + d]$ | $[1 + d; 1 + 2d]$ | $[1 + 2d; 1 + 4d]$ |
| u | $-2d$ $\frac{\alpha}{2-\alpha}(\delta - 1)$ $2d - \frac{\alpha}{2-\alpha}(1 - \delta)$ | $\frac{\alpha}{2-\alpha}(\delta - 1) - 2d$ $\frac{\alpha}{2-\alpha}(\delta - 1)$ $2d$ | $-\frac{4d}{\alpha+2} - \frac{\alpha}{\alpha+2}(\delta - 1)$ $\frac{2\alpha}{\alpha+2}d - \frac{\alpha}{\alpha+2}(\delta - 1)$ $2d$ | $-\frac{4d}{\alpha+2} - \frac{\alpha}{\alpha+2}(\delta - 1)$ $2\frac{\alpha}{\alpha+2}d - \frac{\alpha}{\alpha+2}(\delta - 1)$ $2d$ | 0 $2d$ |

 TABLEAU B.3 – Valeurs de u qui annulent la fonction χ_δ en fonction de δ .

On en déduit finalement les valeurs de la sortie du discriminateur en fonction de l'erreur due au multitrajet (table B.4), puis les biais sur la pseudodistance en fonction de $\Delta\tau = \theta - \tau$ (table B.5). Pour cela, on utilise le fait que $\delta T = \Delta\tau$ et $u = \frac{\tau - \hat{\tau}}{T}$ et donc $\hat{\tau} = \tau - \underbrace{Tu}_{\mathbf{m}[i]/c}$.

| | | | | | | |
|----------|----------------------------------|---|----------------|---|--|--|
| δ | $[0; (\alpha + 1)d]$ | $[(\alpha + 1)d; 2d]$ | $[2d; 1 - 2d]$ | $[1 - 2d; 1 - \frac{2-\alpha}{2}d]$ | $[1 - \frac{2-\alpha}{2}d; 1 + \frac{2-\alpha}{2}d]$ | $[1 + \frac{2-\alpha}{2}d; 1 + 2d]$ |
| u | $-\frac{\alpha}{\alpha+1}\delta$ | $-\frac{\alpha}{1-\alpha}(2d - \delta)$ | 0 | $\frac{\alpha}{\alpha+2}(-2d + 1 - \delta)$ | $\frac{\alpha}{2-\alpha}(\delta - 1)$ | $\frac{\alpha}{\alpha+2}(2d + 1 - \delta)$ |

TABLEAU B.4 – Valeurs des sorties du discriminateur en fonction du retard du multitrajet en chips.

| | | | | |
|-----------------|--|---|------------------|--|
| $\Delta\tau(s)$ | $[0; (\alpha + 1)Td]$ | $[(\alpha + 1)Td; 2Td]$ | $[2Td; T - 2Td]$ | $[T - 2Td; T - \frac{2-\alpha}{2}Td]$ |
| $\mathbf{m}[i]$ | $\frac{\alpha}{\alpha+1}c\Delta\tau$ | $\frac{\alpha}{1-\alpha}c(2Td - \Delta\tau)$ | 0 | $\frac{\alpha}{\alpha+2}c(2dT - T + \Delta\tau)$ |
| $\Delta\tau(s)$ | $[T - \frac{2-\alpha}{2}Td; T + \frac{2-\alpha}{2}Td]$ | $[T + \frac{2-\alpha}{2}Td; T + 2Td]$ | $\geq T + 2Td$ | |
| $\mathbf{m}[i]$ | $\frac{\alpha}{2-\alpha}c(T - \Delta\tau)$ | $\frac{\alpha}{\alpha+2}c(-2Td - T + \Delta\tau)$ | 0 | |

 TABLEAU B.5 – Valeurs du biais sur la pseudodistance pour un multitrajet en fonction de $\Delta\tau$.

Annexe C

Annexes du Chapitre 3

C.1 Amélioration de la détection des multitrajets

C.1.0.1 Le vecteur de biais multitrajet

Les composantes du vecteur \mathbf{m}_k peuvent être nulles en l'absence de multitrajet, et non-nulles en leur présence. Nous devons choisir une loi a priori favorisant donc cette parcimonie et permettant de détecter si le canal correspondant souffre effectivement d'un multitrajet. La loi naturelle découlant du LASSO est la loi de Laplace de moyenne nulle et de paramètre $\frac{1}{\lambda_k}$ [Park et Casella \[2008\]](#). Nous proposons de favoriser la détection des biais en utilisant une loi a priori mixte de Bernoulli-Laplace, c'est à dire que nous allons introduire un vecteur intermédiaire $\mathbf{b}_k \in \{0, 1\}^{2s_k}$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, 2s_k\}, b_{i,k} = 0$ en l'absence de multitrajet sur $y_{i,k}$ (i.e., $m_{i,k} = 0$) et $b_{i,k} = 1$ en présence de multitrajet sur $y_{i,k}$ (i.e., $m_{i,k} \neq 0$) afin d'obtenir la loi a priori sur $m_{i,k}$

$$f(m_{i,k}|b_{i,k}, \lambda_k) \sim \begin{cases} \delta(m_{i,k}) & \text{si } b_{i,k} = 0 \\ \exp(-\lambda_k w_{i,k} |m_{i,k}|) & \text{si } b_{i,k} = 1 \end{cases}, \text{ pour } i = 1, \dots, 2s_k \quad (\text{C.1})$$

où les $b_{i,k}$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre p_k

$$b_{i,k}|p_k \sim \mathcal{B}(b_{i,k}; p_k), \text{ pour } i = 1, \dots, 2s_k \quad (\text{C.2})$$

où $\mathcal{B}(b; p)$ désigne la loi de Bernoulli en b de paramètre p (i.e., $P(b = 1) = p$ et $P(b = 0) = 1 - p$). On utilise de plus la complétion proposée à la partie 3.3.2.2, en introduisant des variables intermédiaires $\tau_{i,k}^2$ pour obtenir finalement

$$\tau_{i,k}^2|\lambda_k \sim \mathcal{E}\left(\tau_{i,k}^2; \frac{2}{\lambda_k^2 w_{i,k}^2}\right), \text{ pour } i = 1, \dots, 2s_k \quad (\text{C.3})$$

$$m_{i,k}|b_{i,k}, \tau_{i,k}^2 \sim \begin{cases} \delta(m_{i,k}) & \text{si } b_{i,k} = 0 \\ \mathcal{N}(m_{i,k}; 0, \tau_{i,k}^2) & \text{si } b_{i,k} = 1 \end{cases}, \text{ pour } i = 1, \dots, 2s_k. \quad (\text{C.4})$$

En supposant l'indépendance entre chacune des variables indicatrice $b_{i,k}$, on obtient

$$f(\mathbf{b}_k|p_k) = \prod_{i=1}^{2s_k} f(b_{i,k}|p_k) \quad (\text{C.5})$$

et en supposant l'indépendance en les différents couples $(m_{i,k}, \tau_{i,k}^2)$ et en rassemblant les $\tau_{i,k}^2$ dans un vecteur $\boldsymbol{\tau}_k^2$, on obtient

$$\begin{aligned} f(\mathbf{m}_k, \boldsymbol{\tau}_k^2 | \lambda_k, \mathbf{b}_k) &= \prod_{i=1}^{2s_k} f(m_{i,k}, \tau_{i,k}^2 | b_{i,k}, \lambda_k) \\ &= \prod_{i=1}^{2s_k} f(m_{i,k} | \tau_{i,k}^2, b_{i,k}) f(\tau_{i,k}^2 | \lambda_k) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$= f(\mathbf{m}_k | \boldsymbol{\tau}_k^2, \mathbf{b}_k) f(\boldsymbol{\tau}_k^2 | \lambda_k) \quad (\text{C.7})$$

C.1.0.2 Loi jointe a priori

On déduit de (3.18), (C.5) et (C.7) la loi jointe a priori des paramètres à estimer $\boldsymbol{\theta}_k = (\mathbf{x}_k^T, \mathbf{m}_k^T, \boldsymbol{\tau}_k^{2T}, \mathbf{b}_k^T)^T$ en fonction des hyperparamètres du problème $\boldsymbol{\varphi}_k = (\lambda_k, p_k)^T$

$$f(\boldsymbol{\theta}_k | \boldsymbol{\varphi}_k) = f(\mathbf{x}_k) f(\mathbf{m}_k, \boldsymbol{\tau}_k^2 | \lambda_k, \mathbf{b}_k) f(\mathbf{b}_k | p_k). \quad (\text{C.8})$$

Pour appliquer la formule de Bayes, nous devons assigner une loi a priori aux hyperparamètres du problème $\boldsymbol{\varphi}_k$.

C.1.1 Lois a priori des hyperparamètres

C.1.1.1 Le paramètre de la loi de Bernoulli

Comme p_k est une probabilité, et est donc dans $[0, 1]$, nous lui assignons une loi a priori uniforme sur cet intervalle, notée $\mathcal{U}_{[0,1]}(p)$

$$p_k \sim \mathcal{U}_{[0,1]}(p_k) \quad (\text{C.9})$$

C.1.1.2 Les paramètres de la loi exponentielle

Comme à la partie 3.3.2.3, on choisit une loi a priori de Jeffrey pour λ_k

$$p(\lambda_k^2) \propto \frac{1}{\lambda_k^2}. \quad (\text{C.10})$$

Nous avons donc, en supposant les divers hyperparamètres indépendants,

$$f(\boldsymbol{\varphi}_k) = f(p_k) f(\lambda_k^2). \quad (\text{C.11})$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner le modèle Bayésien hiérarchique correspondant à toutes ces lois.

C.1.2 Loi a posteriori

La loi a posteriori est donnée par la formule de Bayes

$$f(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\varphi}_k | \mathbf{y}_k) \propto f(\mathbf{y}_k | \boldsymbol{\theta}_k) f(\boldsymbol{\theta}_k | \boldsymbol{\varphi}_k) f(\boldsymbol{\varphi}_k) \quad (\text{C.12})$$

où $f(\mathbf{y}_k | \boldsymbol{\theta}_k)$ est donnée dans (3.14), $f(\boldsymbol{\theta}_k | \boldsymbol{\varphi}_k)$ est donnée dans (C.8) et $f(\boldsymbol{\varphi}_k)$ est donnée dans (C.11). Le calcul direct des estimateurs Bayésiens ne semble pas possible avec une telle expression, et c'est pourquoi nous allons avoir recours à l'échantillonneur de Gibbs présenté dans la partie 3.2.3.1.

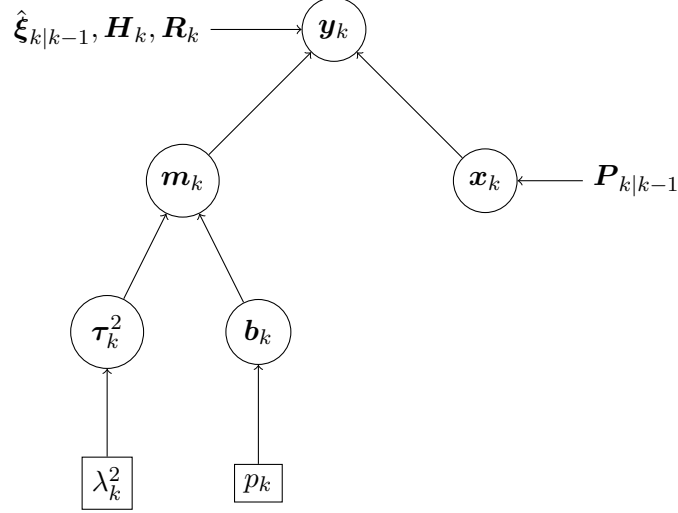


FIGURE C.1 – Graphe de la hiérarchie utilisée pour le modèle Bayésien pour le traitement des multitrajets GNSS.

C.1.3 Modèle hiérarchique proposé

Le modèle Bayésien hiérarchique correspondant à la vraisemblance et aux lois a priori données précédemment est

$$\mathbf{y}|\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k, \sim \mathcal{N}(\mathbf{y}; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{m}_k, \mathbf{R}_k) \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{x}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{0}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \quad (\text{C.14})$$

$$m_{i,k}|b_{i,k}, \tau_{i,k}^2 \sim \begin{cases} \delta(m_{i,k}) & \text{si } b_{i,k} = 0 \\ \mathcal{N}(m_{i,k}; 0, \tau_{i,k}^2) & \text{si } b_{i,k} = 1 \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, 2s_k \quad (\text{C.15})$$

$$\tau_{i,k}^2|\lambda_k^2 \sim \mathcal{E}\left(\tau_{i,k}^2; \frac{2}{\lambda_k^2 w_{i,k}^2}\right), \quad \text{pour } i = 1, \dots, 2s_k \quad (\text{C.16})$$

$$b_{i,k}|p_k \sim \mathcal{B}(b_{i,k}; p_k), \quad \text{pour } i = 1, \dots, 2s_k \quad (\text{C.17})$$

$$p_k \sim \mathcal{U}_{[0,1]}(p_k) \quad (\text{C.18})$$

$$f(\lambda_k^2) \propto \frac{1}{\lambda_k^2} \quad (\text{C.19})$$

Cette hiérarchie est résumée dans la figure C.1. On va déduire de cette hiérarchie les lois conditionnelles de chacun des paramètres (qui seront les lois de proposition de l'échantillonneur de Gibbs). Certaines loi conditionnelles seront indépendantes de certains paramètres à estimer, on marginalisera donc ces dernières afin de simplifier les expressions des loi de proposition (*Collapsed Gibbs Sampler*).

C.1.4 Lois conditionnelles des différents paramètres

C.1.4.1 Loi conditionnelle de $\tau_{i,k}^2$

La loi conditionnelle de $\tau_{i,k}^2$ dépend de la valeur de $b_{i,k}$. On a pour $i = 1, \dots, 2s_k$

$$f(\tau_{i,k}^2|m_{i,k}, \lambda_k^2, b_{i,k}) \propto \begin{cases} \exp\left(-\frac{w_{i,k}^2 \lambda_k^2 \tau_{i,k}^2}{2}\right) & \text{si } b_{i,k} = 0 \\ \exp\left(-\frac{w_{i,k}^2 \lambda_k^2 \tau_{i,k}^2}{2}\right) (\tau_{i,k}^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{m_{i,k}^2}{2\tau_{i,k}^2}\right) & \text{si } b_{i,k} = 1 \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

et donc en reprenant les calculs de la partie 3.3.5.1

$$f(\tau_{i,k}^2 | m_{i,k}, \lambda_k, b_{i,k}) = \begin{cases} \mathcal{E} \left(\tau_{i,k}^2; \frac{2}{w_{i,k}^2 \lambda_k^2} \right) & \text{si } b_{i,k} = 0 \\ \mathcal{GIG} \left(\tau_{i,k}^2; \frac{1}{2}, w_{i,k}^2 \lambda_k^2, m_{i,k}^2 \right) & \text{si } b_{i,k} = 1 \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

avec toujours l'équivalence

$$\begin{aligned} \tau_{i,k}^2 | m_{i,k}, \lambda_k, b_{i,k} &\sim \mathcal{GIG} \left(\tau_{i,k}^2; \frac{1}{2}, w_{i,k}^2 \lambda_k^2, m_{i,k}^2 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\tau_{i,k}^2} | m_{i,k}, \lambda_k, b_{i,k} &\sim \mathcal{IN} \left(\frac{1}{\tau_{i,k}^2}; \sqrt{\frac{\lambda_k^2 w_{i,k}^2}{m_{i,k}^2}}, \lambda_k^2 w_{i,k}^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

C.1.4.2 Lois conditionnelles des $b_{i,k}$

La loi conditionnelle de $(m_{i,k}, b_{i,k})$ est donnée par

$$f(m_{i,k}, b_{i,k} | y_{i,k}, \mathbf{x}_k, \tau_{i,k}^2, p_k) \propto f(y_{i,k} | \mathbf{x}_k, m_{i,k}) f(m_{i,k} | b_{i,k}, \tau_{i,k}^2) f(b_{i,k} | p_k) \quad (\text{C.23})$$

et donc en notant $\mathbf{h}_{i,k}$ la i -ème ligne de la matrice \mathbf{H}_k , on a pour $i = 1, \dots, 2s_k$

$$\begin{aligned} &f(m_{i,k}, b_{i,k} | y_{i,k}, \mathbf{x}_k, \tau_{i,k}^2, p_k) \\ &\propto \exp \left(-\frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k} \mathbf{x}_k - m_{i,k})^2}{2\sigma_{i,k}^2} \right) \left[\delta(m_{i,k})(1 - b_{i,k}) + \frac{\exp \left(-\frac{m_{i,k}^2}{2\tau_{i,k}^2} \right)}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} b_{i,k} \right] [(1 - p_k)\delta(b_{i,k}) + p_k\delta(1 - b_{i,k})] \\ &\propto \exp \left(-\frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k} \mathbf{x}_k - m_{i,k})^2}{2\sigma_{i,k}^2} \right) \left[(1 - p_k)\delta(b_{i,k})\delta(m_{i,k}) + p_k\delta(1 - b_{i,k}) \frac{\exp \left(-\frac{m_{i,k}^2}{2\tau_{i,k}^2} \right)}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} \right] \\ &\propto \exp \left(-\frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k} \mathbf{x}_k)^2}{2\sigma_{i,k}^2} \right) (1 - p_k)\delta(b_{i,k})\delta(m_{i,k}) \\ &\quad + \exp \left(-\frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k} \mathbf{x}_k - m_{i,k})^2}{2\sigma_{i,k}^2} \right) p_k\delta(1 - b_{i,k}) \frac{\exp \left(-\frac{m_{i,k}^2}{2\tau_{i,k}^2} \right)}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

La distribution marginale de $b_{i,k}$ est donc

$$\begin{aligned} f(b_{i,k} | y_{i,k}, \mathbf{x}_k, \tau_{i,k}^2, p_k) &= \int_{\mathbb{R}} f(m_{i,k}, b_{i,k} | y_{i,k}, \mathbf{x}_k, \tau_{i,k}^2, p_k) dm_{i,k} \\ &\propto u_{i,k}\delta(b_{i,k}) + v_{i,k}\delta(1 - b_{i,k}) \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

avec

$$\begin{aligned} u_{i,k} &= \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k} \mathbf{x}_k)^2}{2\sigma_{i,k}^2} \right) (1 - p_k)\delta(m_{i,k}) dm_{i,k} \\ &= \exp \left(-\frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k} \mathbf{x}_k)^2}{2\sigma_{i,k}^2} \right) (1 - p_k) \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

et

$$\begin{aligned}
v_{i,k} &= p_k \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k}\mathbf{x}_k - m_{i,k})^2}{2\sigma_{i,k}^2}\right) \frac{\exp\left(-\frac{m_{i,k}^2}{2\tau_{i,k}^2}\right)}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} dm_{i,k} \\
&= \frac{p_k}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k}\mathbf{x}_k - m_{i,k})^2}{\sigma_{i,k}^2} + \frac{m_{i,k}^2}{\tau_{i,k}^2}\right)\right) dm_{i,k} \\
&= \frac{p_k}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k}\mathbf{x}_k)^2 - 2m_{i,k}(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k}\mathbf{x}_k)}{\sigma_{i,k}^2} + \left(\frac{1}{\sigma_{i,k}^2} + \frac{1}{\tau_{i,k}^2}\right)m_{i,k}^2\right)\right) dm_{i,k} \\
&= \frac{p_k}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\left(\frac{1}{\sigma_{i,k}^2} + \frac{1}{\tau_{i,k}^2}\right)^{-1}} \left(\left(\frac{1}{\sigma_{i,k}^2} + \frac{1}{\tau_{i,k}^2}\right)^{-1} \frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k}\mathbf{x}_k)^2 - 2m_{i,k}(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k}\mathbf{x}_k)}{\sigma_{i,k}^2} + m_{i,k}^2\right)\right) dm_{i,k}
\end{aligned}$$

On pose alors

$$\begin{aligned}
\sigma_{m_{i,k}}^2 &= \left(\frac{1}{\tau_{i,k}^2} + \frac{1}{\sigma_{i,k}^2}\right)^{-1} \\
&= \frac{\sigma_{i,k}^2 \tau_{i,k}^2}{\sigma_{i,k}^2 + \tau_{i,k}^2}
\end{aligned} \tag{C.27}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{m_{i,k}} &= \sigma_{m_{i,k}}^2 \frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k}\mathbf{x}_k)}{\sigma_{i,k}^2} \\
&= \frac{\tau_{i,k}^2}{\sigma_{i,k}^2 + \tau_{i,k}^2} (y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k}\mathbf{x}_k).
\end{aligned} \tag{C.28}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
v_{i,k} &= \frac{p_k}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{m_{i,k}}^2} \left(\sigma_{m_{i,k}}^2 \frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k}\mathbf{x}_k)^2 - 2m_{i,k}(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k}\mathbf{x}_k)}{\sigma_{i,k}^2} + m_{i,k}^2\right)\right) dm_{i,k} \\
&= \frac{p_k}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{m_{i,k}}^2} \left(\mu_{m_{i,k}}^2 \frac{\sigma_{i,k}^2}{\sigma_{m_{i,k}}^2} - 2m_{i,k}\mu_{m_{i,k}} + m_{i,k}^2\right)\right) dm_{i,k} \\
&= \frac{p_k}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} \exp\left(-\frac{\mu_{m_{i,k}}^2 \sigma_{i,k}^2}{2(\sigma_{m_{i,k}}^2)^2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{m_{i,k}}^2} (-2m_{i,k}\mu_{m_{i,k}} + m_{i,k}^2)\right) dm_{i,k} \\
&= \frac{p_k}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} \exp\left(-\frac{\mu_{m_{i,k}}^2 \sigma_{i,k}^2}{2(\sigma_{m_{i,k}}^2)^2}\right) \exp\left(\frac{\mu_{m_{i,k}}^2}{2\sigma_{m_{i,k}}^2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(\mu_{m_{i,k}}^2 - 2m_{i,k}\mu_{m_{i,k}} + m_{i,k}^2)}{2\sigma_{m_{i,k}}^2}\right) dm_{i,k} \\
&= \frac{p_k}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} \exp\left(-\frac{\mu_{m_{i,k}}^2 \sigma_{i,k}^2}{2(\sigma_{m_{i,k}}^2)^2}\right) \exp\left(\frac{\mu_{m_{i,k}}^2}{2\sigma_{m_{i,k}}^2}\right) \sqrt{2\pi\sigma_{m_{i,k}}^2}
\end{aligned}$$

en remarquant

$$\exp\left(-\frac{\mu_{m_{i,k}}^2 \sigma_{i,k}^2}{2(\sigma_{m_{i,k}}^2)^2}\right) = \exp\left(-\frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k}\mathbf{x}_k)^2}{2\sigma_{i,k}^2}\right) \tag{C.29}$$

on a finalement

$$v_{i,k} = p_k \sqrt{\frac{\sigma_{m_{i,k}}^2}{\tau_{i,k}^2}} \exp\left(-\frac{(y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k}\mathbf{x}_k)^2}{2\sigma_{i,k}^2}\right) \exp\left(\frac{\mu_{m_{i,k}}^2}{2\sigma_{m_{i,k}}^2}\right) \tag{C.30}$$

et donc finalement

$$b_{i,k}|y_{i,k}, \mathbf{x}_k, \tau_{i,k}^2, p_k = \mathcal{B} \left(b_{i,k} \left| \frac{v_{i,k}}{u_{i,k} + v_{i,k}} \right. \right) \quad (\text{C.31})$$

N.B., on peut simplifier les expressions de $u_{i,k}$ et $v_{i,k}$ (comme on n'est intéressés que par leur rapport) en prenant des expressions proportionnelles plus simples, à savoir

$$u_{i,k} = (1 - p_k) \quad (\text{C.32})$$

$$v_{i,k} = p_k \sqrt{\frac{\sigma_{m_{i,k}}^2}{\tau_{i,k}^2}} \exp \left(\frac{\mu_{m_{i,k}}^2}{2\sigma_{m_{i,k}}^2} \right). \quad (\text{C.33})$$

C.1.4.3 Lois conditionnelles des $m_{i,k}$

Si on reprend (C.24), en différenciant les cas $b_{i,k} = 0$ et $b_{i,k} = 1$, et en reprenant les mêmes astuces de calcul et notations que précédemment, on trouve

$$f(m_{i,k}|y_{i,k}, \mathbf{x}_k, \tau_{i,k}^2, b_{i,k}) = \begin{cases} \delta(m_{i,k}) & \text{si } b_{i,k} = 0 \\ \mathcal{N}(\mu_{m_{i,k}}, \sigma_{m_{i,k}}^2) & \text{si } b_{i,k} = 1 \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

C.1.4.4 Loi conditionnelle de \mathbf{x}_k

La loi conditionnelle \mathbf{x}_k est toujours

$$\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{m}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{m}_k), \mathbf{P}_{k|k}). \quad (\text{C.35})$$

C.1.4.5 Loi conditionnelle de λ_k

On a toujours

$$f(\lambda_k^2 | \tau_k^2) = \mathcal{G} \left(\lambda_k^2; 2s_k, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2s_k} w_{i,k}^2 \tau_{i,k}^2 \right). \quad (\text{C.36})$$

C.1.4.6 Loi conditionnelle de p_k

On a

$$f(p_k | \mathbf{b}_k) \propto \prod_{i \in \{1, \dots, 2s_k\}, b_{i,k}=0} (1 - p_k) \prod_{i \in \{1, \dots, 2s_k\}, b_{i,k}=1} p_k \mathbf{1}_{[0,1]}(p_k) \quad (\text{C.37})$$

$$\propto (1 - p_k)^{2s_k - \|\mathbf{b}_k\|_0} p_k^{\|\mathbf{b}_k\|_0} \mathbf{1}_{[0,1]}(p_k) \quad (\text{C.38})$$

où $\|\mathbf{b}_k\|_0$ est le nombre d'éléments non-nuls de \mathbf{b}_k et $\mathbf{1}_{[0,1]}(\cdot)$ est la fonction indicatrice sur $[0, 1]$, et donc

$$f(p_k | \mathbf{b}_k) = \mathcal{B}e(p_k; \|\mathbf{b}_k\|_0 + 1, 2s_k - \|\mathbf{b}_k\|_0 + 1) \quad (\text{C.39})$$

où $\mathcal{B}e(p; \alpha, \beta)$ désigne la loi Beta en p de paramètres α et β .

C.1.4.7 Echantillonneur de Gibbs

L'échantillonneur de Gibbs correspondant au modèle hiérarchique (C.13) à (C.19) est donné dans l'algorithme 7.

Algorithme 7 Echantillonneur de Gibbs

Initialiser $\mathbf{x}_k^{(0)}, \mathbf{m}_k^{(0)}, \boldsymbol{\tau}_k^{2(0)}, (\lambda_k^2)^{(0)}$
pour $t = 1, \dots, n_{\text{Gibbs}}$ **faire**
 Tirer $p_k^{(t)}$ suivant $f(p_k | \mathbf{b}_k^{(t-1)})$
pour $i = 1, \dots, 2s_k$ **faire**
 Tirer $\tau_{i,k}^{2(t)}$ suivant $f(\tau_{i,k}^2 | m_{i,k}^{(t-1)}, \lambda_k^{(t-1)}, b_{i,k}^{(t-1)})$
 Tirer $b_{i,k}^{(t)}$ suivant $f(b_{i,k} | y_{i,k}, \mathbf{x}_k^{(t-1)}, \tau_{i,k}^{2(t)}, p_k^{(t)})$
 Tirer $m_{i,k}^{(t)}$ suivant $f(m_{i,k} | y_{i,k}, \mathbf{x}_k^{(t-1)}, \tau_{i,k}^{2(t)}, b_{i,k}^{(t)})$
fin pour
 Tirer $(\lambda_k^2)^{(t)}$ suivant $f(\lambda_k^2 | \boldsymbol{\tau}_k^{2(t)})$
 Tirer $\mathbf{x}_k^{(t)}$ suivant $f(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{m}_k^{(t)})$
fin pour

C.1.5 Amélioration de la convergence**C.1.5.1 Etape de Metropolis Hastings**

Nous avons pu observer de par la forte multi-modalité de la loi a posteriori que l'échantillonneur de Gibbs proposé pouvait rester bloqué dans des minima locaux des variables indicatrices \mathbf{b}_k . En effet, pour la plupart des itérations de l'échantillonneur, et même après un long temps chauffe, les échantillons générés à l'itération (t) par l'échantillonneur vont être constitués de variables indicatrices $b_{i,k}^{(t)}$ toutes égales à 1, mais dont pour certaines les valeurs correspondantes de $m_{i,k}^{(t)}$ seront très faibles (et correspondent à des valeurs théoriques nulles et donc des indicatrices théoriquement égales à 0). Pour pallier ce problème, nous allons pousser l'échantillonneur à tester $b_{i,k}^{(t)} = 0$ pour des valeurs faibles de $m_{i,k}^{(t)}$ et à accepter le nouvel échantillon proposé par une règle de Metropolis Hastings. La démarche ainsi proposée s'appelle *Metropolis Hastings move* en anglais, et est présentée dans l'algorithme 8. L'étape se situe après la génération de tous les échantillons $\tau_{i,k}^{2(t)}$, $b_{i,k}^{(t)}$ et $m_{i,k}^{(t)}$.

Algorithme 8 Metropolis Hastings move

Initialisation $\bar{\mathbf{b}}_k^{(t)} = \mathbf{b}_k^{(t)}$
 Mettre les indices de $\bar{\mathbf{b}}_k^{(t)}$ qui valent 1 correspondant à des valeurs $|\mu_{m_{i,k}}| < \gamma$ à 0
 Tirer $\bar{\mathbf{m}}_k^{(t)}$ suivant $f(\mathbf{m}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k^{(t-1)}, \boldsymbol{\tau}_k^{2(t)}, \bar{\mathbf{b}}_k^{(t)})$
 Tirer $\bar{\boldsymbol{\tau}}_k^{2(t)}$ suivant $f(\boldsymbol{\tau}_k^2 | \bar{\mathbf{m}}_k^{(t)}, \lambda_k^{(t-1)}, \bar{\mathbf{b}}_k^{(t)})$
 Prendre $\{\mathbf{b}_k^{(t)}, \boldsymbol{\tau}_k^{2(t)}\} = \{\bar{\mathbf{b}}_k^{(t)}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_k^{2(t)}\}$ avec la probabilité $\min \left(\frac{f(\bar{\mathbf{b}}_k^{(t)}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_k^{2(t)} | \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k^{(t-1)}, p_k, \lambda_k)}{f(\mathbf{b}_k^{(t)}, \boldsymbol{\tau}_k^{2(t)} | \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k^{(t-1)}, p_k, \lambda_k)}, 1 \right)$
 Si la proposition a été acceptée, retirer $\mathbf{m}_k^{(t)}$

C.1.5.2 Calcul de la probabilité d'acceptation

Les composantes du couple $\{\mathbf{b}_k, \boldsymbol{\tau}_k^2\}$ étant mutuellement indépendantes, on a

$$f(\mathbf{b}_k, \boldsymbol{\tau}_k^2 | \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, p_k, \lambda_k) = \prod_{i=1}^{2s_k} f(b_{i,k}, \tau_{i,k}^2 | y_{i,k}, \mathbf{x}_k, p_k, \lambda_k) \quad (\text{C.40})$$

et pour $i = 1, \dots, 2s_k$

$$\begin{aligned}
f(b_{i,k}, \tau_{i,k}^2 | \cdot) &= \int_{\mathbb{R}} f(b_{i,k}, \tau_{i,k}^2, m_{i,k} | y_{i,k}, \mathbf{x}_k, p_k, \lambda_k) dm_{i,k} \\
&\propto \int_{\mathbb{R}} f(y_{i,k} | m_{i,k}, \mathbf{x}_k) f(m_{i,k} | b_{i,k}, \tau_{i,k}^2) f(b_{i,k} | p_k) f(\tau_{i,k}^2 | \lambda_k) dm_{i,k} \\
&\propto \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(y_{i,k} \mathbf{h}_i \mathbf{x}_k - m_{i,k})^2}{2\sigma_{i,k}^2}\right) \left[(1-p_k)\delta(b_{i,k}) + \frac{p_k}{\sqrt{2\pi\tau_{i,k}^2}} \exp\left(-\frac{m_{i,k}^2}{2\tau_{i,k}^2}\right) \delta(1-b_{i,k}) \right] \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{w_{i,k}^2 \lambda_k^2 \tau_{i,k}^2}{2}\right) dm_{i,k}^2 \\
&\propto \left[\frac{u_{i,k}}{u_{i,k} + v_{i,k}} \delta(b_{i,k}) + \frac{v_{i,k}}{u_{i,k} + v_{i,k}} \delta(1-b_{i,k}) \right] \exp\left(-\frac{w_{i,k}^2 \lambda_k^2 \tau_{i,k}^2}{2}\right) \tag{C.41}
\end{aligned}$$

avec $u_{i,k}, v_{i,k}$ définis dans la partie C.1.4.2 avec

$$\begin{aligned}
\sigma_{m_{i,k}}^2 &= \frac{\sigma_{i,k}^2 \tau_{i,k}^2}{\sigma_{i,k}^2 + \tau_{i,k}^2} \\
\mu_{m_{i,k}} &= \frac{\tau_{i,k}^2}{\sigma_{i,k}^2 + \tau_{i,k}^2} (y_{i,k} - \mathbf{h}_{i,k} \mathbf{x}_k). \tag{C.42}
\end{aligned}$$

d'où

$$f(b_{i,k}, \tau_{i,k}^2 | y_{i,k}, \mathbf{x}_k, p_k, \lambda_k) \propto \begin{cases} \frac{1-p_k}{1-p_k+p_k \sqrt{\frac{\sigma_{m_{i,k}}^2}{\tau_{i,k}^2}} \exp\left(\frac{\mu_{m_{i,k}}^2}{2\sigma_{m_{i,k}}^2}\right)} \exp\left(-\frac{w_{i,k}^2 \lambda_k^2 \tau_{i,k}^2}{2}\right) & \text{si } b_{i,k} = 0 \\ \frac{p_k \sqrt{\frac{\sigma_{m_{i,k}}^2}{\tau_{i,k}^2}} \exp\left(\frac{\mu_{m_{i,k}}^2}{2\sigma_{m_{i,k}}^2}\right)}{1-p_k+p_k \sqrt{\frac{\sigma_{m_{i,k}}^2}{\tau_{i,k}^2}} \exp\left(\frac{\mu_{m_{i,k}}^2}{2\sigma_{m_{i,k}}^2}\right)} \exp\left(-\frac{w_{i,k}^2 \lambda_k^2 \tau_{i,k}^2}{2}\right) & \text{si } b_{i,k} = 1 \end{cases}. \tag{C.43}$$

N.B., les deux dénominateurs, bien qu'égaux, dépendent de $\tau_{i,k}^2$, et on ne peut donc pas simplifier l'expression précédente en invoquant que seule la proportionnalité suffit.

C.1.6 Estimateurs

Nous allons utiliser ici les deux estimateurs Bayésiens présentés précédemment : l'estimateur MAP et l'estimateur MMSE. Plus précisément, nous allons utiliser l'estimateur MAP pour estimer \mathbf{b}_k et l'estimateur MMSE pour les autres paramètres, conditionnellement à la valeur estimée de \mathbf{b}_k , i.e.,

$$\hat{\mathbf{b}}_k = \arg \max_{\mathbf{b}} \#\{t > k_{\text{burn-in}}, \mathbf{b}_k^{(t)} = \mathbf{b}\} \tag{C.44}$$

qui est donc le mode de l'ensemble des vecteurs générés après la période de chauffe. Pour les autres paramètres, on utilise alors la moyenne réduite à l'ensemble $\mathcal{M}(\hat{\mathbf{b}}_k) = \{t > k_{\text{burn-in}}, \mathbf{b}_k^{(t)} = \hat{\mathbf{b}}_k\}$ et pour $\boldsymbol{\eta}_k \in \{\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k, \tau_k^2, \mathbf{b}_k, \mathbf{a}_k, \mathbf{p}_k\}$ on prend la moyenne des vecteurs générés après la période de chauffe restreinte aux réalisations t de la loi a posteriori où $\mathbf{b}_k^{(t)} = \hat{\mathbf{b}}_k$

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_k = \frac{1}{\#(\mathcal{M}(\hat{\mathbf{b}}_k))} \sum_{t \in \mathcal{M}(\hat{\mathbf{b}}_k)} \boldsymbol{\eta}_k^{(t)}. \tag{C.45}$$

C.2 Expérimentations

C.2.1 Données synthétiques

C.2.1.1 Pour une date fixée

Dans un premier temps nous avons testé la méthode Bayésienne proposée sur un ensemble de mesures à une date fixée avant de la tester sur le filtrage de la position. Pour cela, nous choisissons de travailler avec 8 satellites (donc 16 mesures) et d'utiliser des matrices \mathbf{Q}_k et \mathbf{H}_k issues des données précédemment présentées et nous générons \mathbf{x}_k suivant sa loi a priori (C.14). Pour le vecteur \mathbf{m}_k nous fixons le vecteur suivant afin de nous affranchir de la loi a priori choisie (mais tout en gardant l'hypothèse de parcimonie)

$$\mathbf{m}_k = [0 \ 0 \ -20 \ 0 \ 50 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 25 \ 0 \ -5 \ 0]^T. \quad (\text{C.46})$$

Finalement les mesures sont générées d'après leur vraisemblance (C.13). Nous avons d'autre part fixé les valeurs de C/N_0 avec l'hypothèse que ce dernier est important en absence de multitrajet, et faible dans le cas contraire. Plus précisément nous avons choisi

$$C/N_0 = [45 \ 43 \ 35 \ 42 \ 32 \ 45 \ 34 \ 45]^T \quad (\text{C.47})$$

afin de déterminer les poids de la matrice \mathbf{W}_k . Nous pouvons dans un premier temps regarder les histogrammes des valeurs estimées de \mathbf{m}_k sans l'étape de Metropolis Hastings. Nous les avons représentés dans la figure C.2 pour les pseudodistances d'une part et les pseudovitesse d'autre part. On remarque que chaque paramètre a une distribution avec une variance non nulle (i.e., pas de Dirac centré autour de 0), et que donc l'échantillonneur proposé va plutôt estimer des valeurs faibles de $m_{i,k}$ théoriquement nuls plutôt que de les estimer égaux à 0. Cela peut paraître peu gênant pour l'estimation de \mathbf{x}_k , mais cela donne une mauvaise détection des multitrajets, c'est pourquoi on aimerait améliorer l'estimation des indicatrices \mathbf{b}_k . Les histogrammes des biais estimés avec étape de Metropolis Hastings sont donnés dans la figure C.3. On remarque cette fois-ci que les seuls distributions avec une variance non-nulle n'apparaissent que sur les mesures avec un biais théoriquement non-nul alors que les autres ont bien des distributions de Dirac en 0. D'autre part, l'estimation des biais pour les pseudovitesse est très satisfaisantes, et leurs distributions a posteriori ont des variances très faibles. Pour les pseudodistances en revanche, les estimations semblent biaisées, mais quand même satisfaisantes, avec des variances plus importantes. Nous allons voir dans la suite, en rajoutant une dimension temporelle au filtrage, si ces biais d'estimation sont gênant pour l'estimation de la position. Nous avons de plus représenté les histogrammes des hyperparamètres dans la figure C.4. D'autre part, l'échantillonneur a été réglé à 10000 itérations dont une période de chauffe de 1000 afin de garantir la convergence. Nous avons pu vérifier cette convergence en calculant le PSRF sur 10 chaînes en parallèles et vérifié que celui-ci n'excède pas 1,2 comme conseillé dans [Brooks et Gelman \[1998\]](#).

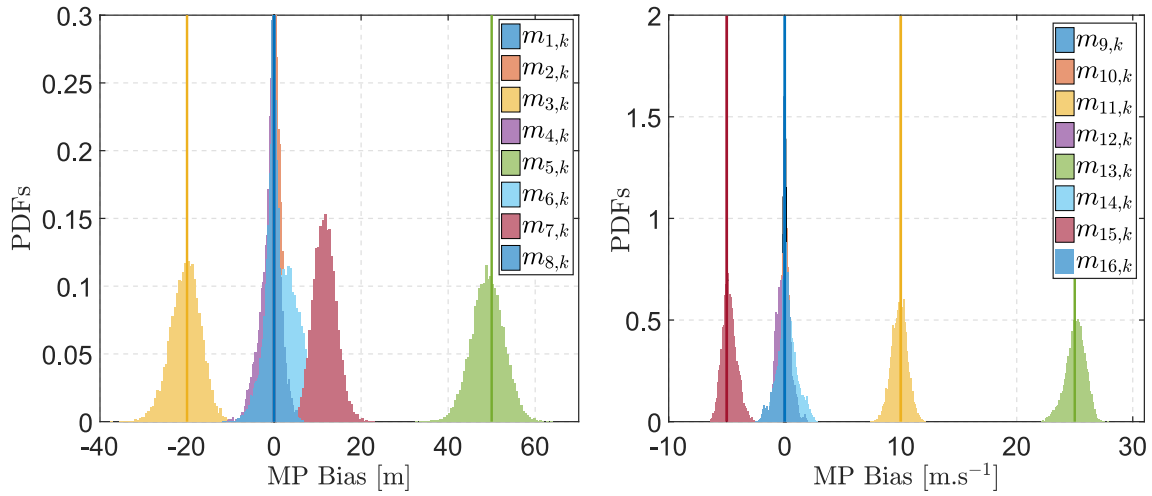


FIGURE C.2 – Lois a posteriori estimées sans étape de Metropolis Hastings et valeurs théoriques (lignes verticales) pour les vecteurs de biais pseudodistance (à gauche) et pseudovitesse (droite) à un instant fixé. Théoriquement, seuls 3 canaux sont affectés par des multitrajets (satellites 3, 5 et 7).

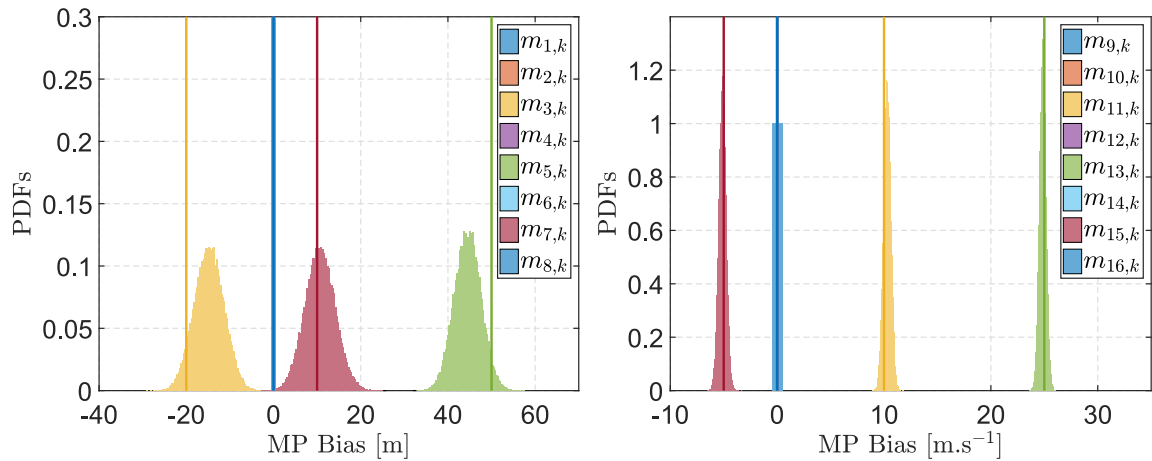


FIGURE C.3 – Lois a posteriori estimées avec étape de Metropolis Hastings et valeurs théoriques (lignes verticales) pour les vecteurs de biais pseudodistance (à gauche) et pseudovitesse (droite) à un instant fixé. Théoriquement, seuls 3 canaux sont affectés par des multitrajets (satellites 3, 5 et 7).

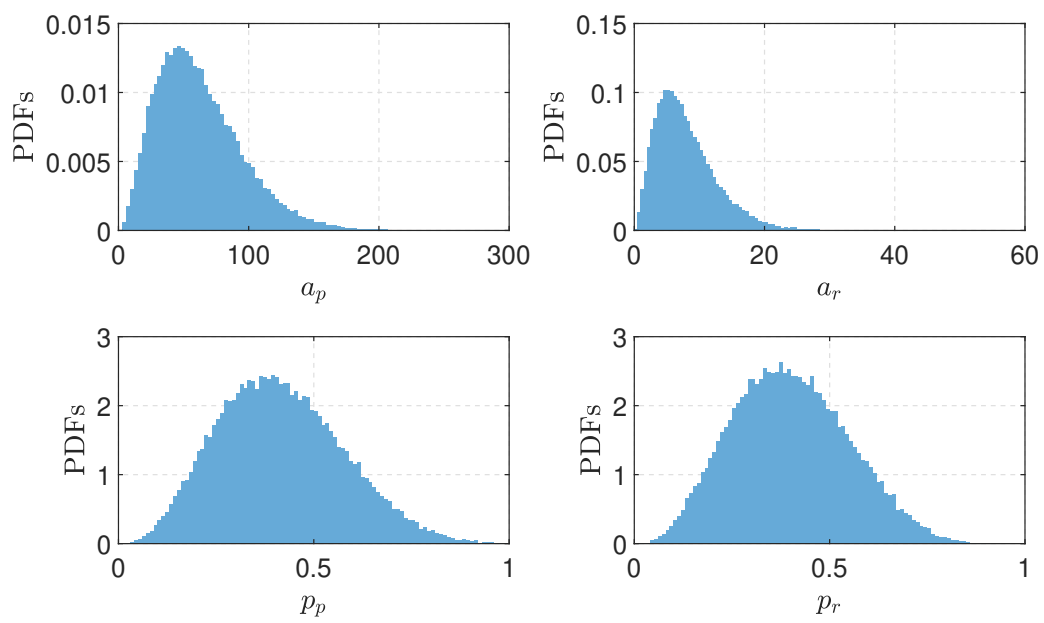


FIGURE C.4 – Lois a posteriori estimées avec étape de Metropolis Hastings pour les différents hyperparamètres.

C.2.1.2 Au cours du temps

Pour rajouter une dimension temporelle à l'estimation, nous avons généré des données avec et sans multitrajets à l'aide des équations du système (3.9) et (3.10) pour $k = 1, \dots, 200$. Pour les valeurs de multitrajets, nous avons de choisi de ne pas en mettre pour $k \in \{1, \dots, 49\} \cup \{131, \dots, 200\}$ et de prendre à ces instants

$$\mathbf{m}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.48})$$

$$C/N_0 = \begin{bmatrix} 45 & 43 & 45 & 42 & 42 & 45 & 43 & 45 \end{bmatrix}^T. \quad (\text{C.49})$$

En revanche, pour $k \in \{50, \dots, 130\}$, nous prenons la configuration précédente (C.46) et (C.47). Nous avons de plus effectué ces calculs pour 100 itérations de Monte-Carlo. La moyenne des résultats plus ou moins leur écart-type sont donnés dans la figure C.5 pour les biais de mesure et C.6 pour l'erreur de position correspondante. On peut tirer les mêmes

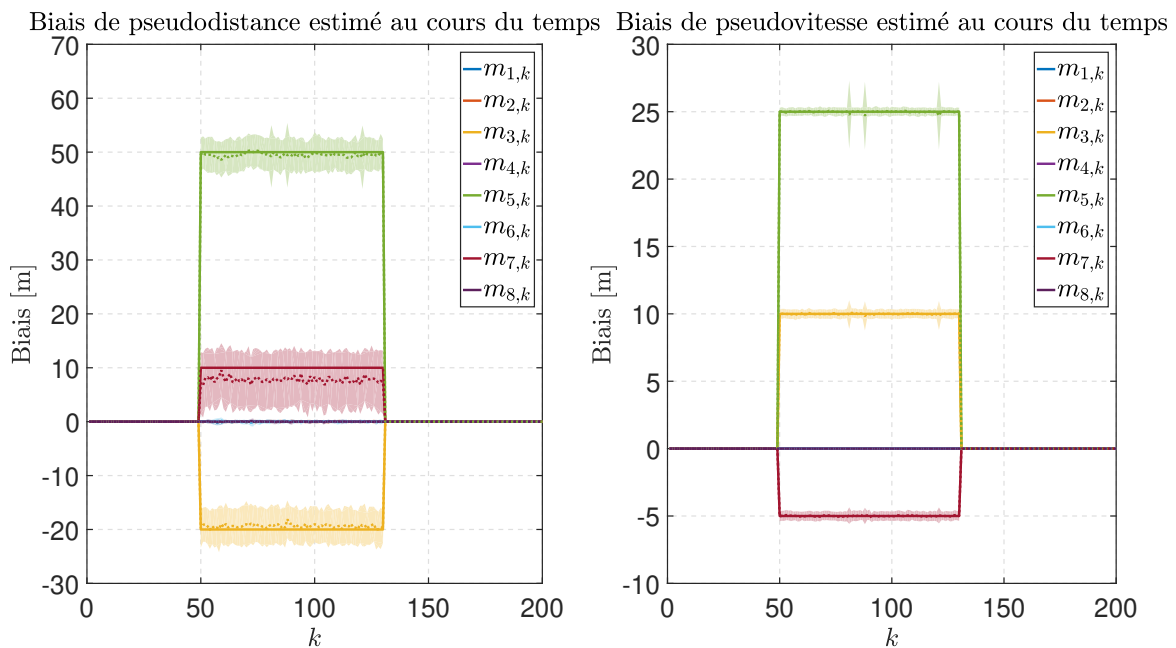


FIGURE C.5 – Biais de mesure estimés moyens (pointillés) plus ou moins leur variance et biais théoriques (traits plein) pour les pseudodistances (à gauche) et les pseudovitesse (à droite).

remarques que précédemment sur l'estimation des biais

- la détection des biais est majoritairement satisfaisante (peu de fausse détection, et quelques détections manquées, représentées par les pics de variance dans l'estimation)
- les pseudodistances ont une plus grande variance que les pseudovitesse et leurs estimations sont plus biaisées.

En revanche, l'erreur de position dans la figure C.6 est nettement réduite par rapport à l'EKF.

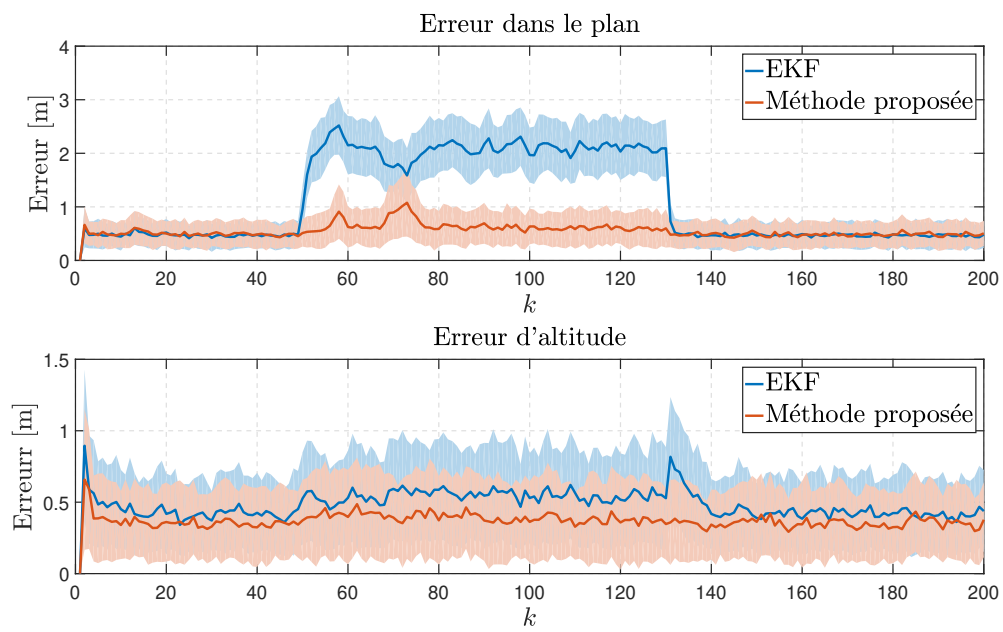


FIGURE C.6 – Erreur de position au cours du temps pour l'EKF et la méthode Bayésienne proposée.

La modélisation des biais multitrajet précédemment considérée est un peu naïve : les biais sont constants dans le temps, et apparaissent et disparaissent aux mêmes moments, mais elle permet d’apprécier la méthode de détection/estimation Bayésienne proposée. Nous allons modifier cette simulation en faisant apparaître et disparaître les biais dans le temps et leur donner une évolution temporelle, comme cela est fait dans [Giremus et al. \[2007\]](#). Pour cela on a fixé plusieurs dates d’apparition/disparition de biais pour 4 satellite, une valeur initiale, et un modèle d’évolution

$$m_{i,k+1} = m_{i,k} + \nu_{i,k}, \quad \nu_{i,k} \sim \mathcal{N}(\nu_{i,k}; 0, \sigma_{i,m}^2) \quad (\text{C.50})$$

avec $\sigma_{i,m}^2 = 0.1\text{m}$ pour les pseudodistances ($i = 1, \dots, s_k$) et $\sigma_{i,m}^2 = 0.01\text{m}$ pour les pseudovitesse ($i = s_k+1, \dots, 2s_k$). Les résultats d’estimation des biais sont donnés dans la figure C.7 pour les pseudodistances et dans la figure C.8 pour les pseudovitesse pour 100 itérations de Monte-Carlo. L’erreur de position correspondante est donnée dans la figure C.9 Une fois

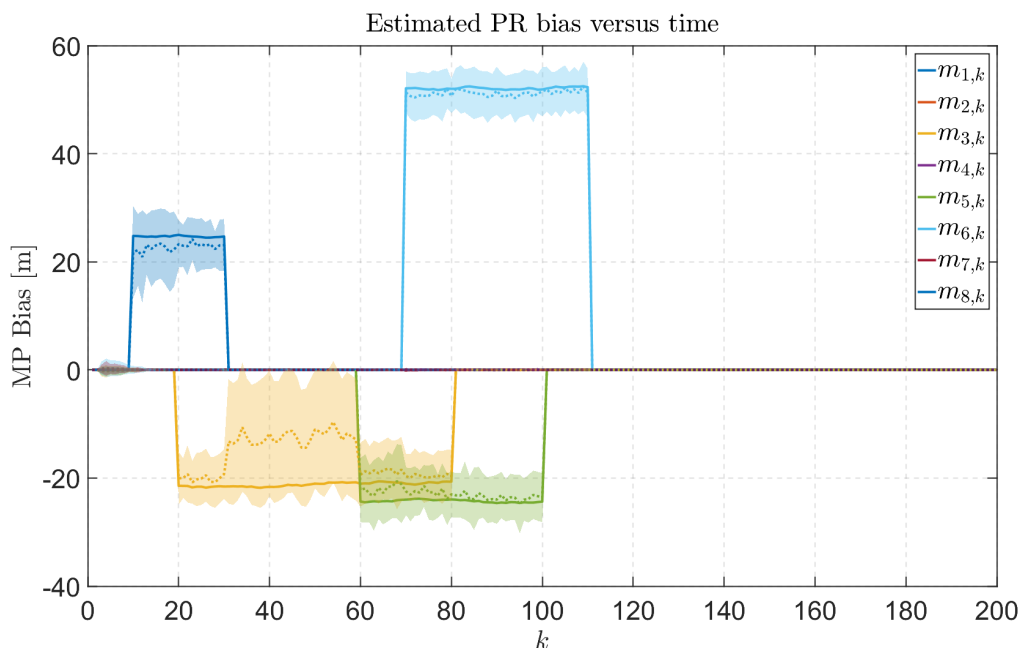


FIGURE C.7 – Biais de mesure estimés moyens (pointillés) plus ou moins leur variance et biais théoriques (traits plein) pour les pseudodistances.

de plus, la détection des biais est majoritairement efficace. En revanche, l’estimation des biais semble moins efficace que dans le scénario précédent, notamment pour les pseudodistances et le satellite #3. Cependant les résultats sont toujours aussi convaincants sur l’erreur de position.

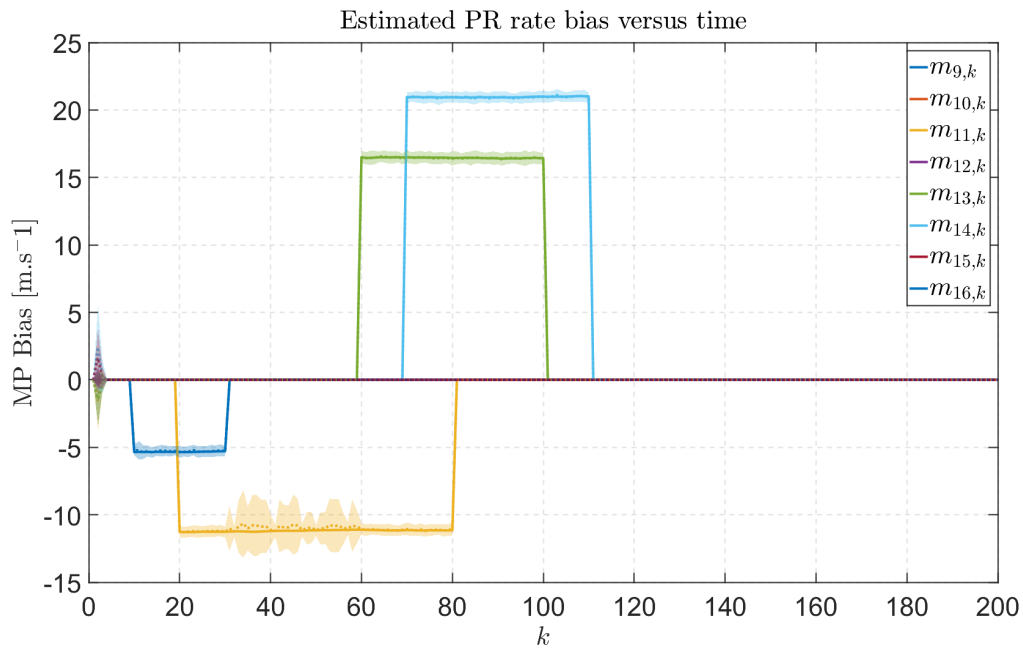


FIGURE C.8 – Biais de mesure estimés moyens (pointillés) plus ou moins leur variance et biais théoriques (traits plein) pour les pseudovitesse .

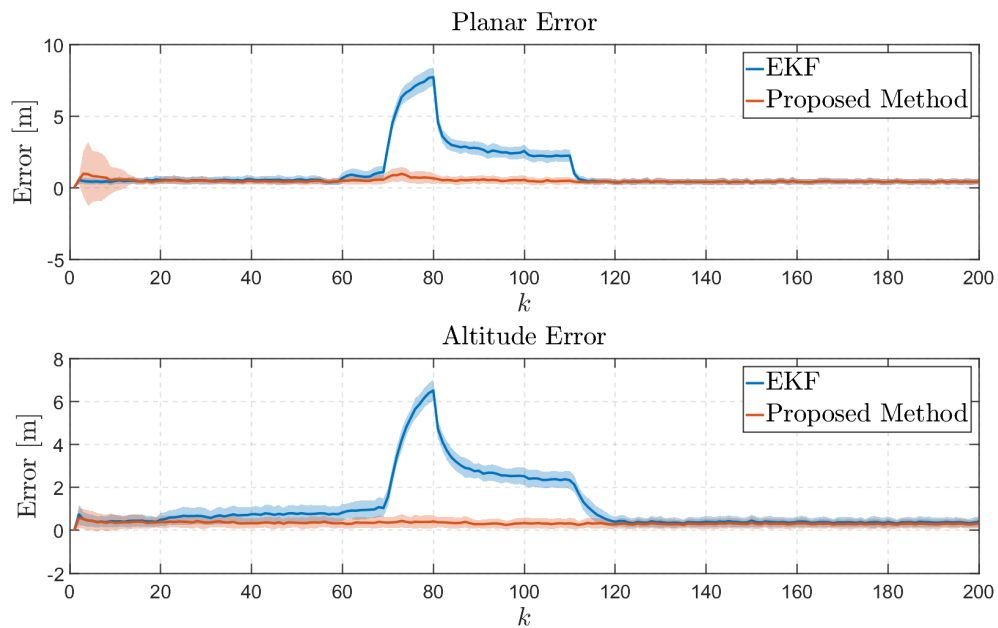


FIGURE C.9 – Erreur de position au cours du temps pour l'EKF et la méthode Bayésienne proposée pour des biais multitrajets plus réalistes.

Annexe D

Annexes du Chapitre 4

D.1 Estimation de densités

D.1.1 Mélange de Gaussiennes

Les travaux de cette partie se basent sur l'article [Dempster et al. \[1977\]](#), qui est aussi présenté de manière simplifiée dans le livre [\[Bishop, 2006, Chap. 9\]](#) et les articles [Zhang et al. \[2003\]](#) et [Bilmes \[1998\]](#). On rappelle qu'on veut estimer la pdf du vecteur

$$\boldsymbol{\nu}_i = \nu_{i,1:K_i}, \quad i = 1, \dots, 2s_k \quad (\text{D.1})$$

où les $\nu_{i,k}$ sont i.i.d. et suivent un mélange de M gaussiennes, i.e.,

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\nu}_i) &= \prod_{k=1}^{K_i} p(\nu_{i,k}) \\ &= \prod_{k=1}^{K_i} \sum_{j=1}^M \alpha_{i,j} f_{\mathcal{N}}(\nu_{i,k}; \mu_{i,j}, \sigma_{i,j}^2) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

où $\alpha_{i,j}$ désigne les proportions du mélange (avec $\alpha_{i,j} \in [0, 1]$ et $\sum_{j=1}^M \alpha_{i,j} = 1$) et $f_{\mathcal{N}}(\nu_{i,k}; \mu_{i,j}, \sigma_{i,j}^2)$ désigne la pdf d'une loi normale de moyenne $\mu_{i,j}$ et de variance $\sigma_{i,j}^2$ en $\nu_{i,k}$ (N.B., la moyenne et la matrice de covariance diffèrent pour chaque satellite i), i.e.,

$$f_{\mathcal{N}}(\nu_{i,k}; \mu_{i,j}, \sigma_{i,j}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{i,j}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{i,j}^2}(\nu_{i,k} - \mu_{i,j})^2\right). \quad (\text{D.3})$$

Le vecteur des paramètres à estimer pour déterminer le mélange est alors

$$\boldsymbol{\Theta}_i = \{\alpha_{i,j}, \mu_{i,j}, \sigma_{i,j}\}_{j=1,\dots,M} \quad (\text{D.4})$$

La vraisemblance de ce vecteur s'écrit

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\Theta}_i | \boldsymbol{\nu}_i) = \prod_{k=1}^{K_i} \sum_{j=1}^M \alpha_{i,j} f_{\mathcal{N}}(\nu_{i,k}; \mu_{i,j}, \sigma_{i,j}). \quad (\text{D.5})$$

et la log-vraisemblance

$$\log(\mathcal{L}(\boldsymbol{\Theta}_i | \boldsymbol{\nu}_i)) = \sum_{k=1}^{K_i} \log \sum_{j=1}^M \alpha_{i,j} f_{\mathcal{N}}(\nu_{i,k}; \mu_{i,j}, \sigma_{i,j}) \quad (\text{D.6})$$

qui semble difficile à maximiser par rapport à $\boldsymbol{\Theta}_i$ de par le logarithme de la somme. Ce problème serait plus simple à résoudre si on avait un vecteur $\mathbf{c}_i = (c_{i,k})_{k=1,\dots,K_i} \in \mathbb{R}^{K_i}$ tel

que $c_{i,k}$ indiquerait dans quelle mélange a été distribuée la donnée $\nu_{i,k}$. En effet, on aurait alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Theta_i | \nu_i, \mathbf{c}_i) &= \log p(\nu_i, \mathbf{c}_i | \Theta_i) \\
&= \log \prod_{k=1}^{K_i} p(\nu_{i,k}, c_{i,k} | \Theta_i) \\
&= \sum_{k=1}^{K_i} \log (p(\nu_{i,k} | c_{i,k}, \Theta_i) p(c_{i,k} | \Theta_i)) \\
&= \sum_{k=1}^{K_i} \log \left(f_{\mathcal{N}}(\nu_{i,k}; \mu_{i,c_{i,k}}, \sigma_{i,c_{i,k}}^2) \pi_{i,c_{i,k}} \right) \tag{D.7}
\end{aligned}$$

qui est cette fois plus facile à maximiser et donc plus commode pour calculer le maximum de vraisemblance de Θ_i . Un tel problème peut être résolu par une méthode itérative dite EM. Comme son nom l'indique, cette méthode comporte deux étapes : une étape dite E d'*expectation*, consistant à calculer la valeur de vraisemblance attendue pour les données complètes et une étape dite M de maximisation, visant à maximiser la fonction trouvée à l'étape E. Plus concrètement, supposons qu'à l'itération t , on obtienne une estimation $\Theta_i^{(t)} = \{\alpha_{i,j}^{(t)}, \mu_{i,j}^{(t)}, \sigma_{i,j}^{(t)}\}_{j=1,\dots,M}$ du vecteur de paramètre Θ . Nous allons décrire les deux étapes à l'itération t .

D.1.1.1 Etape E

L'étape E à l'itération t consiste alors à calculer la valeur attendue de log-vraisemblance pour les données complètes sachant les données connues (incomplètes) et la dernière estimation du vecteur des paramètres $\Theta^{(t)}$, i.e., à calculer

$$Q(\Theta, \Theta_i^{(t)}) = E \left[\log (\mathcal{L}(\Theta_i | \nu_i, \mathbf{c}_i)) | \nu_i, \Theta_i^{(t)} \right] \tag{D.8}$$

soit dans le cas d'un mélange de Gaussiennes [Bilmes \[1998\]](#); [Zhang et al. \[2003\]](#)

$$Q(\Theta, \Theta_i^{(t)}) = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{K_i} \log \left(\alpha_{i,j} f_{\mathcal{N}}(\nu_{i,k}; \mu_{i,j}, \sigma_{i,j}^2) \right) p(j | \nu_{i,k}, \Theta_i^{(t)}) \tag{D.9}$$

où

$$\begin{aligned}
p(j | \nu_{i,k}, \Theta_i^{(t)}) &= \frac{p(\nu_{i,k} | j, \Theta_i^{(t)}) p(j | \Theta_i^{(t)})}{p(\nu_{i,k} | \Theta_i^{(t)})} \\
&= \frac{f_{\mathcal{N}}(\nu_{i,k}; \mu_{i,j}^{(t)}, (\sigma_{i,j}^{(t)})^2) \pi_{i,j}^{(t)}}{\sum_{\ell=1}^M f_{\mathcal{N}}(\nu_{i,k}; \mu_{i,\ell}^{(t)}, (\sigma_{i,\ell}^{(t)})^2) \pi_{i,\ell}^{(t)}}. \tag{D.10}
\end{aligned}$$

Une fois que cette fonction a été exprimée, il faut alors l'optimiser par rapport à Θ , ce qui est expliqué à la prochaine partie.

D.1.1.2 Etape M

La nouvelle valeur $\Theta^{(t+1)}$ de Θ après l'itération $t + 1$ est donnée par

$$\Theta_i^{(t+1)} = \arg \max_{\Theta_i} Q(\Theta, \Theta_i^{(t)}) \tag{D.11}$$

ce qui donne dans le cas d'un mélange de Gaussiennes la mise à jour suivante [Bilmes \[1998\]](#); [Zhang et al. \[2003\]](#)

$$\Theta_i^{(t+1)} \{ \alpha_{i,j}^{(t+1)}, \mu_{i,j}^{(t+1)}, \sigma_{i,j}^{(t+1)} \}_{j=1,\dots,M} \tag{D.12}$$

avec

$$\alpha_{i,j}^{(t+1)} = \frac{1}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} p(j|\nu_{i,k}, \Theta_i^{(t)}) \quad (\text{D.13})$$

$$\mu_{i,j}^{(t+1)} = \frac{\sum_{k=1}^{K_i} \nu_{i,k} p(j|\nu_{i,k}, \Theta_i^{(t)})}{\sum_{k=1}^{K_i} p(j|\nu_{i,k}, \Theta_i^{(t)})} \quad (\text{D.14})$$

$$(\sigma_{i,j}^{(t+1)})^2 = \frac{\sum_{k=1}^{K_i} (\nu_{i,k} - \mu_{i,j}^{(t+1)})^2 p(j|\nu_{i,k}, \Theta_i^{(t)})}{\sum_{k=1}^{K_i} p(j|\nu_{i,k}, \Theta_i^{(t)})} \quad (\text{D.15})$$

D.1.2 Modèle de Markov caché

Il existe 3 problèmes de base lorsque l'on travaille avec des HMM : calculer la vraisemblance des observations pour un modèle donné, trouver la succession d'état qui explique le mieux un modèle et des observations données, et enfin estimer le modèle qui explique le mieux des observations données au sens du maximum de vraisemblance. L'algorithme présenté ici est très célèbre et se nomme algorithme de Baum-Welch¹ [Bilmes \[1998\]](#); [Rabiner \[1989\]](#). C'est ce dernier problème qui nous intéresse, car nous voulons estimer les densités relatives des erreurs de mesures formulées comme HMM, et donc pour chaque mesure i , on cherche alors à estimer

$$\hat{\lambda}_i = \arg \max_{\lambda_i} p(\nu_i | \lambda_i) \quad (\text{D.16})$$

où ν_i est défini dans (D.1). Pour ce problème, une fois de plus, l'estimation des différents paramètres va se faire EM, car c'est un problème de données manquantes. En revanche, le calcul de la vraisemblance $p(\nu_i | \lambda_i)$, nécessaire dans l'étape E, ne peut pas se faire directement du fait du nombre très importants de séquences à visiter (il faut calculer la vraisemblance sur toutes les combinaisons possibles d'enchaînement des états au cours du temps). Cependant, cette étape E peut être accélérée par une méthode de calcul de la vraisemblance appelée *Forward Backward*. La solution correspondante est toujours un algorithme itératif dont le but est d'augmenter la vraisemblance du modèle à chaque itération. Notons que l'étape de mise à jour des paramètres des Gaussiennes est la même que pour la méthode précédente, cependant certaines étapes sont nécessaires en amont [Bilmes \[1998\]](#). Dans la suite, on suppose qu'à l'instant t on dispose de l'estimation $\lambda_i^{(t)} = \{\mathbf{A}_i^{(t)}, \Pi_i^{(t)}, \Theta_i^{(t)}\}$ des paramètres du modèle, avec $\mathbf{A}_i^{(t)} = ((\mathbf{A}_i)_{m,\ell}^{(t)})_{1 \leq m, \ell \leq M}$, $\Pi_i^{(t)} = ((\Pi_i)_\ell^{(t)})_{1 \leq \ell \leq M}$ et $\Theta_i^{(t)} = \{\mu_{i,\ell}^{(t)}; (\sigma_{i,\ell}^2)^{(t)}\}_{1 \leq \ell \leq M}$.

Calculs des variables forward et backward

La variable de forward $f_{i,\ell}$ à l'itération t pour la mesure i et l'état ℓ à l'instant k est définie comme

$$f_{i,\ell}(k) = p(\hat{n}_{i,1}, \dots, \nu_{i,k}, c_{i,k} = \ell | \lambda_i^{(t)}) \quad (\text{D.17})$$

qui est donc la vraisemblance d'observer la mesure $\hat{n}_{i,1}, \dots, \nu_{i,k}$ et de terminer dans l'état ℓ à l'instant k . Ce paramètre peut se calculer de manière récursive pour $k = 1, \dots, K_i$ par

$$f_{i,\ell}(1) = (\Pi_i)_\ell^{(t)} f_{\mathcal{N}}(\hat{n}_{i,1}; \mu_{i,\ell}^{(t)}, (\sigma_{i,\ell}^2)^{(t)}) \quad (\text{D.18})$$

$$f_{i,m}(k+1) = \left(\sum_{\ell=1}^M f_{i,\ell}(k) (\mathbf{A}_i)_{\ell,m}^{(t)} \right) f_{\mathcal{N}}(\hat{n}_{i,k+1}; \mu_{i,m}^{(t)}, (\sigma_{i,m}^2)^{(t)}) \quad (\text{D.19})$$

dont on peut déduire la vraisemblance

$$p(\nu_i | \lambda_i^{(t)}) = \sum_{\ell=1}^M f_{i,\ell}(K_i). \quad (\text{D.20})$$

1. un code complet est disponible à l'adresse <https://www.cs.ubc.ca/~murphyk/Software/HMM/hmm.html>

La variable de backward $b_{i,\ell}$ à l'itération t pour la mesure i et l'état ℓ à l'instant k est quant à elle définie comme

$$b_{i,\ell}(k) = p(\hat{n}_{i,k+1}, \dots, \hat{n}_{i,K_i} | c_{i,k} = \ell, \lambda_i^{(t)}) \quad (\text{D.21})$$

et désigne donc la vraisemblance des mesures à venir sachant qu'on est le modèle et qu'on est parti de l'état ℓ à la date k . Cette variable peut se calculer de même de manière récurrente par

$$b_{i,\ell}(K_i) = 1 \quad (\text{D.22})$$

$$b_{i,\ell}(k) = \sum_{m=1}^M b_{i,m}(k+1) (\mathbf{A}_i)_{\ell,m}^{(t)} f_{\mathcal{N}}(\hat{n}_{i,k+1}; \mu_{i,m}^{(t)}, (\sigma_{i,m}^2)^{(t)}) \quad (\text{D.23})$$

dont on peut aussi déduire la vraisemblance

$$p(\boldsymbol{\nu}_i | \lambda_i^{(t)}) = \sum_{\ell=1}^M b_{i,\ell}(1) (\Pi_i)_{\ell}^{(t)} f_{\mathcal{N}}(\hat{n}_{i,1}; \mu_{i,\ell}^{(t)}, (\sigma_{i,\ell}^2)^{(t)}). \quad (\text{D.24})$$

Il faut faire attention lors des implémentations de ces différentes étapes car plus K_i est grand, et plus les probabilités calculées vont devenir faible. Il faudra alors procéder à une version mise à l'échelle de l'algorithme [Rabiner \[1989\]](#); [Shen \[2008\]](#), qui revient à chaque fois à normaliser les variables de forward et backward par leurs sommes. Si cette approche est envisagée, les expressions qui suivent seront alors légèrement modifiée.

Calculs de probabilités intermédiaires

Ces variables permettent de calculer différentes probabilités à l'itération t , notamment

$$\gamma_{i,\ell}(k) = p(c_{i,k} = \ell | \boldsymbol{\nu}_i, \lambda_i^{(t)}) \quad (\text{D.25})$$

$$= \frac{f_{i,\ell}(k) b_{i,\ell}(k)}{\sum_{m=1}^M f_{i,m}(k) b_{i,m}(k)} \quad (\text{D.26})$$

et

$$\zeta_{i,\ell,m}(k) = p(c_{i,k} = \ell, c_{i,k+1} = m | \boldsymbol{\nu}_i, \lambda_i^{(t)}) \quad (\text{D.27})$$

$$= \frac{\gamma_{i,\ell}(k) (\mathbf{A}_i)_{\ell,m}^{(t)} f_{\mathcal{N}}(\hat{n}_{i,k+1}; \mu_{i,m}^{(t)}, (\sigma_{i,m}^2)^{(t)}) b_{i,m}(k+1)}{b_{i,\ell}(k)}. \quad (\text{D.28})$$

Ces deux probabilités vont finalement nous permettre de donner l'estimation du modèle à l'itération $t+1$.

Paramètres de la chaîne de Markov

On obtient à la fin de l'itération $t+1$ l'estimation des paramètres de la chaîne de Markov de la mesure i suivante

$$(\Pi_i)_{\ell}^{(t+1)} = \gamma_{i,\ell}(1) \quad (\text{D.29})$$

$$(\mathbf{A}_i)_{\ell,m}^{(t+1)} = \frac{\sum_{k=1}^{K_i-1} \zeta_{i,\ell,m}(k)}{\sum_{k=1}^{K_i-1} \gamma_{i,\ell}(k)}. \quad (\text{D.30})$$

Paramètres des Gaussiennes

On obtient à la fin de l'itération $t + 1$ l'estimation pour la mesure i des paramètres des ℓ différentes Gaussiennes

$$\mu_{i,\ell}^{(t+1)} = \frac{\sum_{k=1}^{K_i} \nu_{i,k} \gamma_{i,\ell}(k)}{\sum_{k=1}^{K_i} \gamma_{i,\ell}(k)} \quad (\text{D.31})$$

$$(\sigma_{i,j}^{(t+1)})^2 = \frac{\sum_{k=1}^{K_i} (\nu_{i,k} - \mu_{i,j}^{(t+1)})^2 \gamma_{i,\ell}(k)}{\sum_{k=1}^{K_i} \gamma_{i,\ell}(k)}. \quad (\text{D.32})$$

D.2 Méthodes de filtrage associées

D.2.1 Filtrage sous l'estimation de mélanges de Gaussiennes

Le problème de filtrage revient toujours à estimer la densité $p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k})$. On rappelle le modèle utilisé

$$\boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1}, \quad \mathbf{u}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{u}_{k-1}; \mathbf{0}, \mathbf{Q}) \quad (\text{D.33})$$

$$\mathbf{z}_k = h_k(\boldsymbol{\xi}_k) + \mathbf{n}_k(c_k), \quad n_{i,k}(c_{i,k}) \sim \mathcal{N}(n_{i,k}; \mu_{i,c_{i,k}}, \sigma_{i,c_{i,k}}^2) \quad (\text{D.34})$$

$$P(c_{i,k} = j) = \pi_{i,j} \quad (\text{D.35})$$

Le calcul de la loi a posteriori est similaire à celle du filtre de Kalman, sauf que l'on suppose que la loi a posteriori à l'instant précédent $k-1$ s'écrit comme un mélange de q_{k-1} Gaussiennes

$$p(\boldsymbol{\xi}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^{q_{k-1}} \alpha_{j,k-1} f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k-1|k-1}, \mathbf{P}_{j,k-1|k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) \quad (\text{D.36})$$

on a alors

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k}) &= \sum_{j=1}^{q_k} p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k}, c_k = j) \underbrace{P(c_k = j | \mathbf{z}_{1:k})}_{\alpha_{j,k}} \\ &= \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} \frac{p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, c_k = j) p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)} \\ &= \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} \frac{p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, c_k = j)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)} \int p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{\xi}_{k-1}) p(\boldsymbol{\xi}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\boldsymbol{\xi}_{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} \frac{p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, c_k = j)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)} \int p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{\xi}_{k-1}) \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} \alpha_{\ell,k-1} f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\ell,k-1|k-1}, \mathbf{P}_{\ell,k-1|k-1}) d\boldsymbol{\xi}_{k-1} \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

où l'on voit apparaître un mélange de $q_k q_{k-1}$ Gaussiennes. Pour éviter la surcharge de calcul, on effectue une étape de *merging* ici, c'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\xi}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) &= \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} \alpha_{\ell,k-1} f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\ell,k-1|k-1}, \mathbf{P}_{\ell,k-1|k-1}) \\ &\approx f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}; \bar{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1}, \bar{\mathbf{P}}_{k-1|k-1}) \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

où

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1} = \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} \alpha_{\ell,k-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\ell,k-1|k-1} \quad (\text{D.39})$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{k-1|k-1} = \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} \alpha_{\ell,k-1} \left(\mathbf{P}_{\ell,k-1|k-1} + (\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\ell,k-1|k-1} - \bar{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1})(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\ell,k-1|k-1} - \bar{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1})^T \right) \quad (\text{D.40})$$

ce qui dans (D.37) donne

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k}) &= \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} \frac{p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, c_k = j)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)} \int f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_k; \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_{k-1}, \mathbf{Q}) f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}; \bar{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1}, \bar{\mathbf{P}}_{k-1|k-1}) d\boldsymbol{\xi}_{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} \frac{p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, c_k = j)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)} f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \end{aligned}$$

avec

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} = \mathbf{F}\bar{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1} \quad (\text{D.41})$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{P}}_{k-1|k-1}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \quad (\text{D.42})$$

et finalement

$$p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k|k}, \mathbf{P}_{j,k|k})$$

où

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k|k} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k|k-1} + \mathbf{K}_{j,k}(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{j,k|k-1}) \quad (\text{D.43})$$

$$\mathbf{P}_{j,k|k} = \mathbf{P}_{j,k|k-1} - \mathbf{K}_{j,k}\mathbf{S}_{j,k}\mathbf{K}_{j,k}^T \quad (\text{D.44})$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{j,k|k-1} = h_k(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k|k-1}) + \boldsymbol{\mu}_j \quad (\text{D.45})$$

$$\mathbf{S}_{j,k} = \mathbf{H}_k\mathbf{P}_{j,k|k-1}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_j \quad (\text{D.46})$$

$$\mathbf{K}_{j,k} = \mathbf{P}_{j,k|k-1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{S}_{j,k}^{-1} \quad (\text{D.47})$$

où \mathbf{H}_k est la matrice Jacobienne de la fonction h_k évaluée en $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k|k-1}$, $\boldsymbol{\mu}_j$ est le vecteur correspondant aux moyennes des mélanges de Gaussiennes et \mathbf{R}_j la matrice diagonale des variances correspondant à la j -ème combinaison possible. Il ne reste maintenant plus qu'à exprimer la mise à jour des poids. On a par définition

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k} &= P(c_k = j | \mathbf{z}_{1:k}) \\ &\propto p(\mathbf{z}_k | c_k = j, \mathbf{z}_{1:k-1}) p(c_k = j) \\ &\propto f_{\mathcal{N}}(\mathbf{z}_k; \hat{\mathbf{z}}_{j,k|k-1}, \mathbf{S}_{j,k}) p(c_k = j) \end{aligned}$$

et d'autre part, $c_k = j$ correspond à une réalisation possible du vecteur \mathbf{c}_k parmi toutes les combinaisons des modes des différentes mesures $c_{i,k} = j_i, i = 1, \dots, 2s_k$. En supposant que les modes dans lesquels se trouvent chaque mesure sont indépendants, on a

$$\begin{aligned} p(c_k = j) &= \prod_{i=1}^{2s_k} p(c_{i,k} = j_i) \\ &= \prod_{i=1}^{2s_k} \pi_{i,j_i} \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

donc en connaissant les proportions des modèles de chacune des mesures, on obtient l'expression finale en normalisant ces coefficients par leur somme

$$\alpha_{j,k} = \frac{f_{\mathcal{N}}(\mathbf{z}_k; \hat{\mathbf{z}}_{j,k|k-1}, \mathbf{S}_{j,k}) p(c_k = j)}{\sum_{m=1}^{q_k} f_{\mathcal{N}}(\mathbf{z}_k; \hat{\mathbf{z}}_{m,k|k-1}, \mathbf{S}_{m,k}) p(c_k = m)}. \quad (\text{D.49})$$

Les équations (D.49), (D.40), (D.41), (D.42), (D.43), (D.44), (D.45), (D.46), (D.47) et (D.49) permettent d'en déduire la mise à jour de la loi a posteriori du vecteur d'état à l'instant k .

D'autre part, on peut en déduire une estimation du vecteur d'état $\boldsymbol{\xi}_k$ et des indicatrices c_k en choisissant la composante ayant le poids le plus important (estimateur MAP)

$$\hat{c}_k = \arg \max_j \alpha_{j,k} \quad (\text{D.50})$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\hat{c}_k, k|k}. \quad (\text{D.51})$$

D.2.2 Filtrage sous l'hypothèse de modèles de Markov cachés

On rappelle qu'à l'instant k , le modèle est gouverné par les équations

$$\boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1}, \quad \mathbf{u}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{u}_{k-1}; \mathbf{0}, \mathbf{Q}) \quad (\text{D.52})$$

$$\mathbf{z}_k = h_k(\boldsymbol{\xi}_k) + \mathbf{n}_k(\mathbf{c}_k), \quad n_{i,k}(c_{i,k}) \sim \mathcal{N}(n_{i,k}; \mu_{i,c_{i,k}}, \sigma_{i,c_{i,k}}^2) \quad (\text{D.53})$$

$$P(c_{i,k} = j | c_{i,k-1} = \ell) = (\mathbf{A}_i)_{\ell,j} \quad (\text{D.54})$$

$$P(c_{i,0} = j) = (\Pi_i)_j \quad (\text{D.55})$$

où pour chaque mesure i , \mathbf{A}_i désigne la matrice de transition et Π_i le vecteur des probabilités initiales. Dans la suite, nous désignerons par c_k l'ensemble des réalisations du vecteur \mathbf{c}_k pour développer les calculs. En effet, c_k désigne le mode dans lequel se trouve chaque mesure, et il y a donc une valeur de c_k possible par combinaison des composantes du vecteur \mathbf{c}_k dont le cardinal vaut $q_k = M^{2s_k}$. On suppose qu'à l'instant $k-1$, la loi a posteriori de l'état s'écrit

$$p(\boldsymbol{\xi}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^{q_{k-1}} \alpha_{j,k-1} f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k-1|k-1}, \mathbf{P}_{j,k-1|k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) \quad (\text{D.56})$$

on a

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k}) &= \sum_{j=1}^{q_k} p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k}, c_k = j) \underbrace{P(c_k = j | \mathbf{z}_{1:k})}_{\alpha_{j,k}} \\ &= \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} \frac{p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, c_k = j) p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)} \\ &= \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} \frac{p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, c_k = j)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)} \int p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{\xi}_{k-1}) p(\boldsymbol{\xi}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j) d\boldsymbol{\xi}_{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} \frac{p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, c_k = j)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)} \int p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{\xi}_{k-1}) \\ &\quad \times \sum_{\ell=1}^{r_{k-1}} p(\boldsymbol{\xi}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_{k-1} = \ell) \underbrace{P(c_{k-1} = \ell | c_k = j, \mathbf{z}_{1:k-1})}_{\alpha_{\ell,j,k-1}} d\boldsymbol{\xi}_{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} \frac{p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, c_k = j)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)} \int p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{\xi}_{k-1}) \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} \alpha_{\ell,j,k-1} p(\boldsymbol{\xi}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_{k-1} = \ell) d\boldsymbol{\xi}_{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} \frac{p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, c_k = j)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)} \int p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{\xi}_{k-1}) \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} \alpha_{\ell,j,k-1} f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\ell,k-1|k-1}, \mathbf{P}_{\ell,k-1|k-1}) d\boldsymbol{\xi}_{k-1} \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

où l'on voit apparaître un mélange de $q_k q_{k-1}$ Gaussiennes. Pour éviter la surcharge de calcul, l'IMM effectue une étape de *merging* ici (de manière analogue à la section précédente), c'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\xi}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j) &= \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} \alpha_{\ell,j,k-1} f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\ell,k-1|k-1}, \mathbf{P}_{\ell,k-1|k-1}) \\ &\approx f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}; \bar{\boldsymbol{\xi}}_{j,k-1|k-1}, \bar{\mathbf{P}}_{j,k-1|k-1}) \end{aligned} \quad (\text{D.58})$$

où

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_{j,k-1|k-1} = \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} \alpha_{\ell,j,k-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\ell,k-1|k-1} \quad (\text{D.59})$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{j,k-1|k-1} = \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} \alpha_{\ell,j,k-1} \left(\mathbf{P}_{\ell,k-1|k-1} + (\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\ell,k-1|k-1} - \bar{\boldsymbol{\xi}}_{j,k-1|k-1})(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\ell,k-1|k-1} - \bar{\boldsymbol{\xi}}_{j,k-1|k-1})^T \right) \quad (\text{D.60})$$

ce qui dans (D.57) donne

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k}) &= \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} \frac{p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, c_k = j)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)} \int f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_k; \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_{k-1}, \mathbf{Q}) f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}; \bar{\boldsymbol{\xi}}_{j,k-1|k-1}, \bar{\mathbf{P}}_{j,k-1|k-1}) d\boldsymbol{\xi}_{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} \frac{p(\mathbf{z}_k | \boldsymbol{\xi}_k, c_k = j)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, c_k = j)} f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k|k-1}, \mathbf{P}_{j,k|k-1}) \end{aligned}$$

avec

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k|k-1} = \mathbf{F} \bar{\boldsymbol{\xi}}_{j,k-1|k-1} \quad (\text{D.61})$$

$$\mathbf{P}_{j,k|k-1} = \mathbf{F} \bar{\mathbf{P}}_{j,k-1|k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \quad (\text{D.62})$$

et finalement

$$p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \sum_{j=1}^{q_k} \alpha_{j,k} f_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k|k}, \mathbf{P}_{j,k|k})$$

où

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k|k} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k|k-1} + \mathbf{K}_{j,k}(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{j,k|k-1}) \quad (\text{D.63})$$

$$\mathbf{P}_{j,k|k} = \mathbf{P}_{j,k|k-1} - \mathbf{K}_{j,k} \mathbf{S}_{j,k} \mathbf{K}_{j,k}^T \quad (\text{D.64})$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{j,k|k-1} = \mathbf{H} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{j,k|k-1} + \boldsymbol{\mu}_j \quad (\text{D.65})$$

$$\mathbf{S}_{j,k} = \mathbf{H} \mathbf{P}_{j,k|k-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_j \quad (\text{D.66})$$

$$\mathbf{K}_{j,k} = \mathbf{P}_{j,k|k-1} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_{j,k}^{-1} \quad (\text{D.67})$$

où $\boldsymbol{\mu}_j$ est le vecteur correspondant aux moyennes des mélanges de Gaussiennes et \mathbf{R}_j la matrice diagonale des variances correspondant à la j -ème combinaison possible. Il ne reste maintenant plus qu'à exprimer la mise à jour des poids $\alpha_{j,k}$ et l'expression des poids intermédiaires $\alpha_{\ell,j,k-1}$ qui interviennent dans l'étape de *merging*. On a par définition

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k} &= P(c_k = j | \mathbf{z}_{1:k}) \\ &\propto p(\mathbf{z}_k | c_k = j, \mathbf{z}_{1:k-1}) p(c_k = j | \mathbf{z}_{1:k-1}) \\ &\propto f_{\mathcal{N}}(\mathbf{z}_k; \hat{\mathbf{z}}_{j,k|k-1}, \mathbf{S}_{j,k}) \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} p(c_k = j | c_{k-1} = \ell) p(c_{k-1} = \ell | \mathbf{z}_{1:k-1}) \end{aligned} \quad (\text{D.68})$$

et d'autre part, $c_k = j$ correspond à une réalisation possible parmi toutes les combinaisons des modes des différentes mesures $c_{i,k} = j_i, i = 1, \dots, 2s_k$. En supposant que les modes dans lesquels se trouvent chaque mesure sont indépendants, on a

$$\begin{aligned} p(c_k = j | c_{k-1} = \ell) &= \prod_{i=1}^{2s_k} p(c_{i,k} = j_i | c_{i,k-1} = \ell_i) \\ &= \prod_{i=1}^{2s_k} (\mathbf{A}_i)_{\ell_i, j_i} \end{aligned} \quad (\text{D.69})$$

d'après l'hypothèse que chaque $c_{i,k}$ suit une chaîne de Markov. Ainsi en injectant dans (D.68)

$$\alpha_{j,k} \propto f_{\mathcal{N}}(\mathbf{z}_k; \hat{\mathbf{z}}_{j,k|k-1}, \mathbf{S}_{j,k}) \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} \left[\prod_{i=1}^{2s_k} (\mathbf{A}_i)_{\ell_i, j_i} \right] \alpha_{\ell, k-1} \quad (\text{D.70})$$

dont on obtient l'expression finale en normalisant ces coefficients par leur somme

$$\alpha_{j,k} = \frac{f_{\mathcal{N}}(\mathbf{z}_k; \hat{\mathbf{z}}_{j,k|k-1}, \mathbf{S}_{j,k}) \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} \left[\prod_{i=1}^{2s_k} (\mathbf{A}_i)_{\ell_i, j_i} \right] \alpha_{\ell, k-1}}{\sum_{m=1}^{q_k} f_{\mathcal{N}}(\mathbf{z}_k; \hat{\mathbf{z}}_{m,k|k-1}, \mathbf{S}_{m,k}) \sum_{\ell=1}^{q_{k-1}} \left[\prod_{i=1}^{2s_k} (\mathbf{A}_i)_{\ell_i, m_i} \right] \alpha_{\ell, k-1}}. \quad (\text{D.71})$$

et finalement,

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell, j, k-1} &= P(c_{k-1} = \ell | c_k = j, \mathbf{z}_{1:k-1}) \\ &\propto P(c_k = j | c_{k-1} = \ell) P(c_{k-1} = \ell | \mathbf{z}_{1:k-1}) \\ &\propto \left[\prod_{i=1}^{2s_k} (\mathbf{A}_i)_{\ell_i, j_i} \right] \alpha_{\ell, k-1} \end{aligned}$$

dont on déduit

$$\alpha_{\ell, j, k-1} = \frac{\left[\prod_{i=1}^{2s_k} (\mathbf{A}_i)_{\ell_i, j_i} \right] \alpha_{\ell, k-1}}{\sum_{m=1}^{q_k} \left[\prod_{i=1}^{2s_k} (\mathbf{A}_i)_{m_i, j_i} \right] \alpha_{m, k-1}} \quad (\text{D.72})$$

Les équations (D.71), (D.60), (D.61), (D.62), (D.63), (D.64), (D.65), (D.66), (D.67), (D.71) et (D.72) permettent d'en déduire la mise à jour de la loi a posteriori du vecteur d'état à l'instant k . D'autre part, on peut en déduire une estimation du vecteur d'état $\boldsymbol{\xi}_k$ et des indicatrices c_k en choisissant la composante ayant le poids le plus important (estimateur MAP)

$$\hat{c}_k = \arg \max_j \alpha_{j,k} \quad (\text{D.73})$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\hat{c}_k, k|k}. \quad (\text{D.74})$$

Bibliographie

- Alam, N. et Dempster, A. G. Cooperative Positioning for Vehicular Networks : Facts and Future. *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.*, 14(4), p. 1708–1717, Dec. 2013. (Cité à la page 30)
- Alspach, Daniel L. et Sorenson, Harold W. Nonlinear Bayesian Estimation Using Gaussian Sum Approximations. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 17(4), p. 439–448, Aug. 1972. (Cité à la page 120)
- Bar-Shalom, Yaakov, Challa, Subhash, et Blom, Henk A. P. IMM Estimator Versus Optimal Estimator for Hybrid Systems. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 41(3), p. 986–991, July 2005. (Cité à la page 120)
- Bar-Shalom, Yaakov, Kirubarajan, Thiagalingam, et Li, X.-Rong. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. John Wiley & Sons, Inc., 2002. (Cité aux pages 36 et 120)
- Beck, Amir et Teboulle, Marc. A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2(1), p. 183–202, 2009. (Cité à la page 43)
- Bétaille, D., Peyret, F., Ortiz, M., Miquel, S., et Fontenay, L. A New Modeling Based on Urban Trenches to Improve GNSS Positioning Quality of Service in Cities. *IEEE Trans. Intell. Trans. Systems Magazine*, 5(3), p. 59–70, Fall 2013. (Cité à la page 30)
- Bhuiyan, Mohammad Zahidul H. et Lohan, Elena Simona. Advanced Multipath Mitigation Techniques for Satellite-Based Positioning Applications. *International Journal of Navigation and Observation*, 10 2010. (Cité aux pages 16 et 30)
- Bilmes, Jeff A. A Gentle Tutorial of the EM Algorithm and its Application to Parameter Estimation for Gaussian Mixture and Hidden Markov Models. Technical Report, University of Berkeley, April 1998. (Cité aux pages 173, 174, et 175)
- Bishop, Christopher M. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer-Verlag New York, 2006. (Cité aux pages 105, 106, et 173)
- Blanco-Delgado, N. et Nunes, F. D. Multipath Estimation in Multicorrelator GNSS Receivers using the Maximum Likelihood Principle. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 48(4), p. 3222–3233, Oct. 2012. ISSN 0018-9251. (Cité à la page 30)
- Bourdeau, Aude, Sahmoudi, Mohamed, et Tourneret, Jean-Yves. Constructive Use of GNSS NLOS-Multipath : Augmenting the Navigation Kalman Filter with a 3D Model of the Environment. Dans *Proc. Int. Conf. Information Fusion (FUSION 2012)*, pages 2271–2276, Singapore, China, July 2012. (Cité à la page 30)
- Boyd, S., Parikh, N., Chu, E., Peleato, B., et Eckstein, J. Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 3(1), p. 1–122, 2010. (Cité à la page 43)

- Brenneman, M. T., Morton, Y. T., et Zhou, Q. GPS Multipath Detection with ANOVA for Adaptive Arrays. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 46(3), p. 1171–1184, July 2010. (Cité à la page 30)
- Brooks, Stephen P. et Gelman, Andrew. General Methods for Monitoring Convergence of Iterative Simulations. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 7(4), p. 434 – 455, 1998. (Cité aux pages 88 et 165)
- Brown, Robert Grover et Hwang, Patrick Y. C. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1992. (Cité à la page 36)
- Cai, Changsheng, He1, Chang, Santerre, Rock, Pan1, Lin, Cui, Xianqiang, et Zhu, Jianjun. A comparative analysis of measurement noise and multipath for four constellations : GPS, BeiDou, GLONASS and Galileo. *Survey Review*, 48(349), p. 287–295, March 2016. (Cité à la page 128)
- Candès, E.J., Wakin, M. B., et Boyd, S.P. Enhancing Sparsity by Reweighted ℓ_1 Minimization. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 14, p. 877–905, April 2008. (Cité aux pages xx, 43, 45, et 46)
- Carcanague, Sébastien. *Low-cost GPS/GLONASS Precise Positioning Algorithm in Constrained Environment*. PhD thesis, Université de Toulouse, Feb. 2013. (Cité aux pages 55 et 56)
- Carcanague, Sébastien, Julien, Olivier, Vigneau, Willy, et Macabiau, Christophe. Finding the Right Algorithm : Low-Cost, Single-Frequency GPS/GLONASS RTK for Road Users. *InsideGNSS*, pages 70–80, November/December 2013. (Cité à la page 55)
- Caron, F., Davy, M., , Duflos, E., et Vanheeghe, P. Particle Filtering for Multisensor Data Fusion With Switching Observation Models : Application to Land Vehicle Positioning. *IEEE Trans. Signal Process.*, 55(6), p. 2703–2719, June 2007. (Cité à la page 104)
- Carter, C. K ; et Kohn, R. Markov Chain Monte Carlo in Conditionally Gaussian State Space Models. *Biometrika*, 83(3), p. 589–601, Sept. 1996. (Cité aux pages 125 et 128)
- Chen, Rong et Liu, Jun S. Mixture Kalman Filters. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 62(3), p. 493–508, 2000. (Cité à la page 120)
- Chen, Scott Shaobing, Donoho, David L, et Saunders, Michael A. Atomic Decomposition by Basis Pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(1), p. 33–61, 1998. (Cité à la page 43)
- Chen, X., DAVIS, F., Peng, S., et Morton, Y. Comparative Studies of GPS Multipath Mitigation Methods Performance. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 49(3), p. 1555–1568, July 2013. (Cité à la page 30)
- Daneshmand, S., Broumandan, A., Sokhandan, N., et Lachapelle, G. GNSS Multipath Mitigation with a Moving Antenna Array. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 49(1), p. 693–698, Jan. 2013. ISSN 0018-9251. (Cité à la page 30)
- Dempster, A. P., Laird, N. M., et Rubin, D. B. Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 39(1), p. 1–38, 1977. (Cité aux pages 105 et 173)
- Doppler, Christian. Über das farbige licht der doppelsterne und einige andere gestirne des himmels. *Journal de l'Académie des Sciences de Prague*, 8, May 1842. (Cité aux pages 23 et 134)

- Doucet, Arnaud et de Freitas, Nando. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer New York, 2001. (Cité aux pages 125 et 128)
- ESA. Galileo's Ground Segment. https://www.esa.int/Our_Activities/Navigation/Galileo/Galileo_Launches/Galileo_s_ground_segment, July 2014. [En ligne ; visité le 24-Jul-2018]. (Cité aux pages xix, 18, et 19)
- Farrell, Jay A. et Barth, Matthew. *The Global Positioning System & Inertial Navigation*. McGraw-Hill, 1999. (Cité aux pages xix, 22, et 133)
- Fenton, Patrick C. et Jones, Jason. The Theory and Performance of NovAtel Inc.'s Vision Correlator . Dans *Proc. of the 19 th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2006)*, pages 2178–2186, Long Beach, CA, Sept. 2005. (Cité à la page 30)
- Figueiredo, Mário A. T. et Nowak, Robert D. An EM Algorithm for Wavelet-Based Image Restoration. *IEEE Trans. Image Process.*, 12(8), p. 906–916, 8 2003. (Cité à la page 43)
- Fox, John et Weisberg, Sanford. Robust Regression. Technical Report, University of Minnesota, 10 2013. URL <http://users.stat.umn.edu/~sandy/courses/8053/handouts/robust.pdf>. (Cité à la page 55)
- Fruhwirth-Schnatter, Sylvia, Celeux, Gilles, et Robert, Christian P. *Handbook of Mixture Analysis*. Chapman and Hall/CRC, 2018. (Cité aux pages 125 et 128)
- Fu, Wenjiang J. Penalized Regressions : The Bridge versus the LASSO. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 7(3), p. 397–416, 1998. (Cité à la page 43)
- Galileo. Ionospheric Correction Algorithm for Galileo Single Frequency Users. European GNSS (Galileo) Open Service, European Commission, Sept. 2016. (Cité à la page 29)
- Garin, Lionel et Rousseau, Jean-Michel. Enhanced Strobe Correlator Multipath Rejection for Code & Carrier. Dans *Proc. of the 10th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1997)*, pages 559–568, Kansas City, MO, Sept. 1997. (Cité à la page 16)
- Giremus, A., Tournet, J.-Y., et Calmettes, V. A Particle Filtering Approach for Joint Detection/Estimation of Multipath Effects on GPS Measurements. *IEEE Trans. Signal Process.*, 55(4), p. 1275–1285, April 2007. (Cité aux pages 30, 47, et 170)
- Giremus, Audrey. *Apports des techniques de filtrage non linéaire pour la navigation avec les systèmes de navigation inertielle et le GPS*. PhD thesis, Supaéro, Dec. 2005. (Cité aux pages 146, 147, et 148)
- Gleason, S. et Gebre-Egziabher, D. Indoor and Weak Signal Navigation. Dans *GNSS Applications and Methods*, Chapitre 12, pages 291–327. Artech House, 2009. (Cité à la page 30)
- Groves, Paul D. *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*. Artech House Publishers, 1 édition, 2008a. (Cité aux pages xix, 11, 14, 16, 18, 22, 23, 24, 25, 28, 29, 30, 35, 49, 132, et 134)
- Groves, Paul D. Satellite Navigation Processing, Errors, and Geometry. Dans *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*, Chapitre 7, pages 195–278. Artech House, 2008b. ISBN 978-1-58053-255-6. (Cité à la page 27)
- Groves, Paul D et Jiang, Ziyi. Height Aiding, C/N_0 Weighting and Consistency Checking for GNSS NLOS and Multipath Mitigation in Urban Areas. *Journal of Navigation*, 66(5), p. 653–669, July 2013. (Cité à la page 55)

- Gu, Y., Hsu, L. T., et Kamijo, S. GNSS/Onboard Inertial Sensor Integration With the Aid of 3-D Building Map for Lane-Level Vehicle Self-Localization in Urban Canyon. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 65(6), p. 4274–4287, June 2016. (Cité à la page 30)
- Gustafsson, F. *Statistical Sensor Fusion*. Professional Publishing House, 2012. (Cité aux pages 35 et 38)
- Irsigler, Markus. *Multipath Propagation, Mitigation and Monitoring in the Light of Galileo and the Modernized GPS*. PhD thesis, Universität Der Bundeswehr München, Munchen, Germany, July 2008. (Cité à la page 147)
- Jardak, N., Vervisch-Picois, A., et Samama, N. Multipath Insensitive Delay Lock Loop in GNSS Receivers. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 47(4), p. 2590–2609, Oct. 2011. (Cité à la page 30)
- Joseph, Angelo et Petovello, Mark. GNSS Solutions : Measuring GNSS Signal Strength. *InsideGNSS*, pages 20–25, November/December 2010. (Cité à la page 31)
- Julien, Olivier, Macabiau, Christophe, Issler, Jean-Luc, et Ries, Lionel. 1-bit processing of composite BOC (CBOC) signals. Dans *CNES-ESA, 1st Workshop on GALILEO Signals and Signal Processing*, Toulouse, France, Oct. 2006. (Cité à la page 18)
- Julier, Simon J. et Uhlmann, Jeffrey K. A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems. Dans *Proc. SPIE 3068, Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI*, Orlando, FL, 1997. (Cité à la page 128)
- Kalman, Rudolf E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, 82, p. 35–45, 1960. (Cité à la page 35)
- Kaplan, Elliott D. et Hegarty, Christopher J. *Understanding GPS : Principles and Applications*. Artech House Publishers, 2 édition, 2006. (Cité aux pages xx, 16, 24, 26, 34, et 35)
- Kay, Steven M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Detection Theory*, volume 2. A. V. Oppenheim,, Jan. 1998. (Cité à la page 80)
- Klobuchar, John A. Ionospheric Time-Delay Algorithm for Single-Frequency GPS Users. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 23(3), p. 325–331, May 1987. (Cité aux pages 29 et 137)
- Klobuchar, John A. Ionospheric Effects on GPS. *GPS World*, 4(2), p. 33–44, April 1991. (Cité à la page 27)
- Ko, H., Kim, B., et Kong, S. H. GNSS Multipath-Resistant Cooperative Navigation in Urban Vehicular Networks. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 64(12), p. 5450–5463, Dec. 2015. (Cité à la page 30)
- Krarup, Torben, Juhl, Jens, et Kubik, Kurt. Götterdämmerung Over Least Squares Adjustment. Dans *Proceedings of the 14th Congress of Int. Society for Photogrammetry and Remote Sensing*, Hamburg, Germany, 1980. (Cité à la page 56)
- Kubo, Yukihiro, Matsunaga, Yuu, Munetomo, Naoki, Fujita, Shinya, Ohta, Koji, et Sugimoto, Sueo. Gaussian Sum Filters and Its Applications to GNSS Positioning. Dans *Proc. of the 24th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2011)*, pages 2105–2112, Portland, OR, Sept. 2011. (Cité aux pages 30 et 120)
- Kuusniemi, Heidi. *User-Level Reliability and Quality Monitoring in Satellite-Based Personal Navigation*. PhD thesis, Tampere University of Technology, 6 2005. (Cité à la page 55)

- Lasserre, M., Bidon, S., et Chevalier, F. Le. New Sparse-Promoting Prior for the Estimation of a Radar Scene with Weak and Strong Targets. *IEEE Trans. Signal Process.*, 64(17), p. 4634–4643, Sept. 2016. (Cité à la page 30)
- Le Marchand, Olivier, Bonnifait, Philippe, Ibañez-Guzmán, Javier, Bétaille, David, et Peyret, François. Characterization of GPS Multipath for Passenger Vehicles Across Urban Environments. *ATTI dell'Istituto Italiano di Navigazione*, 189, p. 77 – 88, July 2009. (Cité à la page 29)
- Leandro, Rodrigo, Santos, Marcel, et Langley, Richard B. UNB Neutral Atmosphere Models : Development and Performance. Dans *Proc. of The Institute of Navigation National Technical Meeting (ION ITM 2006)*, pages 564–573, Monterey, CA, Jan. 2006. (Cité aux pages 29 et 138)
- Lee, S., Lohan, E. S., et Kim, S. Array-Based GNSS Signal Tracking With a Reduced State Signal Model. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 52(3), p. 1267–1283, June 2016. ISSN 0018-9251. (Cité à la page 30)
- LeGland, François et Oudjane, Nadia. A robustification approach to stability and to uniform particle approximation of nonlinear filters : the example of pseudo-mixing signals. *Stochastic Processes and their Applications*, 106(2), p. 279–316, Aug. 2003. (Cité à la page 125)
- Leigsnering, M., Ahmad, F., Amin, M. G., et Zoubir, A. M. Parametric Dictionary Learning for Sparsity-Based TWRI in Multipath Environments. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 52(2), p. 532–547, April 2016. (Cité à la page 30)
- Lesouple, Julien, Barbiero, Franck, Faurie, Frédéric, Sahmoudi, Mohamed, et Tourneret, Jean-Yves. Robust Covariance Matrix Estimation and Sparse Bias Estimation for Multipath Mitigation. Dans *Proc. of the 31st International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS+ 2018)*, pages 1684–1690, Miami, FL, Sept. 2018a. (Cité aux pages 3 et 56)
- Lesouple, Julien, Barbiero, Franck, Faurie, Frédéric, Sahmoudi, Mohamed, et Tourneret, Jean-Yves. Smooth Bias Estimation for Multipath Mitigation Using Sparse Estimation. Dans *Proc. IEEE Int. Conf. on Inf. Fusion (FUSION)*, pages 1684–1690, Cambridge, UK, July 2018b. (Cité aux pages 3 et 51)
- Lesouple, Julien, Robert, Thierry, Sahmoudi, Mohamed, Tourneret, Jean-Yves, et Vigneau, Willy. Multipath Mitigation for GNSS Positioning in Urban Environment Using Sparse Estimation. *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.*, 2018c. (Cité aux pages 3 et 46)
- Lesouple, Julien, Tourneret, Jean-Yves, Sahmoudi, Mohamed, Barbiero, Franck, et Faurie, Frédéric. Multipath Mitigation in Global Navigation Satellite Systems Using a Bayesian Hierarchical Model with Bernoulli Laplacian Priors. Dans *Proc. IEEE Workshop on Stat. Signal Processing (SSP)*, pages 578–582, Freiburg, Germany, June 2018d. (Cité à la page 3)
- Lesouple, Julien, Tourneret, Jean-Yves, Vigneau, Willy, Sahmoudi, Mohamed, et Marmet, François-Xavier. Traitement des Multitrajets GNSS par Méthode Parcimonieuse, 2017. Déposé le 3 mai 2017, n°FR3066027A1. (Cité aux pages 3 et 46)
- Marais, J., Berbineau, M., et Heddebaut, M. Land Mobile GNSS Availability and Multipath Evaluation Tool. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 54(5), p. 1697–1704, Sept. 2005. (Cité à la page 29)
- MathPages. The Doppler Effect. <http://www.mathpages.com/home/kmath587/kmath587.htm>. [En ligne ; visité le 26-07-2018]. (Cité à la page 135)

- McGraw, G. A. et Braash, M. S. GNSS Multipath Mitigation Using Gated and High Resolution Correlator Concepts. Dans *Proc. of the 1999 National Technical Meeting of The Institute of Navigation (NTM 99)*, pages 333–342, San Diego, CA, Jan. 1999. (Cité aux pages 15, 16, 30, et 147)
- Michael, John R., Schucany, William R., et Haas, Roy W. Generating Random Variates Using Transformations with Multiple Roots. *The American Statistician*, 30(2), p. 88–90, May 1976. (Cité à la page 86)
- Misra, P., Burke, B.P., et Pratt, M.M. GPS Performance in Navigation. *Proc. IEEE*, 87(1), p. 65–85, Jan. 1999. (Cité à la page 30)
- Miura, S., Hsu, L. T., Chen, F., et Kamijo, S. GPS Error Correction With Pseudorange Evaluation Using Three-Dimensional Maps. *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.*, 16(6), p. 3104–3115, Dec. 2015. (Cité à la page 30)
- Mohiuddin, Shan, Gustafson, Donald E., et Rachlin, Yaron. Mitigating the Effects of GNSS Multipath with a Coded Filter. Dans *Proc. of the 24th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION 2011)*, pages 2381–2394, Portland, OR, Sept. 2011. (Cité aux pages 30 et 31)
- Navipedia. GLONASS Ground Segment. https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/GLONASS_Ground_Segment, 2011. [En ligne; visité le 24-Jul-2018]. (Cité aux pages xix, 19, et 20)
- NAVSTAR. GPS User Equipment Introduction. United States Coast Guard, public release version, Navigation Center, September 1996. (Cité aux pages xix, 8, et 9)
- NAVSTAR. Global Positioning Systems Directorate Systems Engineering & Integration Interface Specification IS-GPS-200J. NAVSTAR GPS Space Segment/Navigation User Segment Interfaces, Navigation Center, September 2018. (Cité aux pages 28 et 131)
- Niell, A. E. Global Mapping Functions for the Atmosphere Delay at Radio Wavelengths. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 101(B2), p. 3227–3246, 1996. (Cité aux pages 29, 138, et 140)
- Olsson, Carl, Carlsson, Marcus, Andersson, Fredrik, et Larsson, Viktor. Non-convex Rank/Sparsity Regularization and Local Minima. Dans *Proc. of the 2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, Venice, Italy, 2017. (Cité à la page 128)
- Ozkan, Emre. Derivation of the IMM filter. Technical Report, Linköping University. URL <http://www.control.isy.liu.se/student/graduate/TargetTracking/IMMderivation.pdf>. (Cité à la page 120)
- Park, Trevor et Casella, George. The Bayesian Lasso. *Journal of the American Statistical Association*, 103, p. 681–686, 2008. (Cité aux pages 82, 83, 102, et 157)
- Parkinson, B.W. et Spilker, J.J. Multipath Effects. Dans *Global Positioning System : Theory and Applications Volume 1*, Zarchan, Paul (éditeur), volume 163 de *Progress in astronautics and aeronautics*, Chapitre 14, pages 547–568. American Institute of Aeronautics & Astronautics, 1996. ISBN 9781600864193. (Cité à la page 30)
- Pendse, G. V. A tutorial on the LASSO and the shooting algorithm. Technical Report, Harvard Medical School, Feb. 2011. (Cité à la page 43)
- Pereyra, M., Schniter, P., Chouzenoux, E., Pesquet, J.-C., Tourneret, J.-Y., Hero, A., et McLaughlin, S. Tutorial on Stochastic Simulation and Optimization Methods in Signal Processing. *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.*, 10(2), p. 224–241, March 2016. (Cité à la page 81)

- Petetin, Yohan et Desbouvries, François. Bayesian Conditional Monte Carlo Algorithms for Nonlinear Time-Series State Estimation. *IEEE Trans. Signal Process.*, 63(14), p. 3586 – 3598, April 2015. (Cité à la page 125)
- Peyraud, Sébastien, Bétaille, David, Renault, Stéphane, Ortiz, Miguel, Mougel, Florian, Meizel, Dominique, et Peyret, François. About Non-Line-Of-Sight Satellite Detection and Exclusion in a 3D Map-Aided Localization Algorithm. *Sensors*, 13(1), p. 829–847, 2013. (Cité à la page 30)
- Pirsiavash, Ali, Broumandan, Ali, Lachapelle, Gérard, et O’Keefe, Kyle. GNSS Code Multipath Mitigation by Cascading Measurement Monitoring Techniques. *Sensors*, 18(6), p. 1967–1999, June 2018. (Cité à la page 128)
- Prades, Carles Fernandez. *Advance Signal Processing Techniques For Global Navigation Satellite Systems Receivers*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 2005. (Cité à la page 30)
- Rabaoui, A., Viandier, N., Duflos, E., Marais, J., et Vanheeghe, P. Dirichlet Process Mixtures for Density Estimation in Dynamic Nonlinear Modeling : Application to GPS Positioning in Urban Canyons. *IEEE Trans. Signal Process.*, 60(4), p. 1638–1655, April 2012. (Cité aux pages 30, 104, et 128)
- Rabiner, Lawrence R. A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech recognition. *Proceedings of the IEEE*, 77(2), p. 257–286, Feb. 1989. (Cité aux pages 116, 117, 175, et 176)
- Ramani, S., Blu, T., et Unser, M. Monte-Carlo SURE : A Black-Box Optimization of Regularization Parameters for General Denoising Algorithms. *IEEE Trans. Image Process.*, 17(9), p. 1540–1554, Sept. 2008. (Cité à la page 128)
- Rao, K. Deergha, Swamy, M. N. S., et Plotkin, E. I. GPS Navigation With Increased Immunity to Modeling Errors. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 40(1), p. 2–11, Jan. 2004. ISSN 0018-9251. (Cité à la page 55)
- Realini, Eugenio et Reguzzoni, Mirko. goGPS : Open Source Software for Enhancing the Accuracy of Low-Cost Receivers by Single-Frequency Relative Kinematic Positioning. *Measurement Science and Technology*, 24(11), 2013. (Cité aux pages 48 et 49)
- Remondi, Benjamin W. Computing Satellite Velocity Using the Broadcast Ephemeris. *GPS Solutions*, 8(3), p. 181–183, 2004. (Cité à la page 132)
- Robert, Christian P., Chopin, Nicolas, et Rousseau, Judith. Harold Jeffreys’s Theory of Probability Revisited. *Statistical Science*, 24(2), p. 141–172, 2009. (Cité à la page 84)
- Rougerie, Sébastien. *Algorithmes de diversité d’antennes appliqués à la réception des signaux GNSS en environnement urbain et sur terminal mobile*. PhD thesis, ISAE-ONERA SCANR, Jan. 2012. (Cité à la page 30)
- Sahmoudi, M. et Amin, M.G. Fast Iterative Maximum-Likelihood Algorithm (FIMLA) for Multipath Mitigation in Next Generation of GNSS Receivers. Dans *Proc. of the 40th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pages 579–584, Pacific Grove, CA, Oct. 2006. (Cité à la page 30)
- Schenewerk, Mark. A Brief Review of Basic GPS Orbit Interpolation Strategies. *GPS Solutions*, 6(4), p. 265–267, 2003. (Cité à la page 28)
- Sensors. Special issue on GNSS and Fusion with Other Sensors*. 2018. (Cité à la page 128)

- Shannon, Claude. E. Communication In The Presence Of Noise. *Proceedings of the IEEE*, 86(2), p. 447–457, Feb. 1998. (Cité à la page 11)
- Shen, Dawei. Some Mathematics for HMM. Technical Report, Massachusetts Institute of Technology, Oct. 2008. (Cité à la page 176)
- Simsky, Andrew et Boon, Franck. Carrier Phase & Doppler-Based Algorithms for Real-Time Standalone Positioning. Dans *Proc. of the European Navigation Conference GNSS 2003*, Graz, Austria, April 2003. (Cité à la page 141)
- Smith, G.L., Schmidt, S. F., et McGee, L. A ;. Application of Statistical Filter Theory to the Optimal Estimation of Position and Velocity on Board a Circumlunar Vehicle. Tr r-135, NASA, 1962. (Cité à la page 38)
- Soubielle, J., Fijalkow, I., Duvaut, P., et Bibaut, A. GPS positioning in a multipath environment. *IEEE Trans. Signal Process.*, 50(1), p. 141–150, Jan. 2002. ISSN 1053-587X. (Cité aux pages 146, 147, et 148)
- Soubies, Emmanuel, Blanc-Féraud, Laure, et Aubert, Gilles. A Continuous Exact ℓ_0 Penalty (CEL0) for Least Squares Regularized Problem. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 8(3), p. 1607–1639, 2015. (Cité aux pages 42 et 128)
- Tay, Sarab et Marais, Juliette. Weighting models for GPS Pseudorange observations for land transportation in urban canyons. Dans *Proc. of the 6th European Workshop on GNSS Signals and Signal Processing*, Munich, Germany, 2013. (Cité à la page 55)
- Tibshirani, R. Regression Shrinkage and Selection via the Lasso. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 58, p. 267–288, 1996. (Cité à la page 43)
- Tibshirani, Robert, Saunders, Michael, Rosset, Saharon, Zhu, Ji, et Knight, Keith. Sparsity and Smoothness via the Fused Lasso. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, pages 91–108, 2005. (Cité à la page 46)
- Townsend, Bryan R. et Fenton, Patrick C. A Practical Approach to the Reduction of Pseudorange Multipath Errors in a L1 GPS Receiver. Dans *Proc. of the 7th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1994)*, pages 143–148, Salt Lake City, UT, Sept. 1994. (Cité à la page 30)
- Van Dierendonck, A. J., Fenton, Pat, et Ford, Tom. Theory and Performance of Narrow Correlator Spacing in a GPS Receiver. *Navigation*, 39(3), p. 265–283, Sept. 1992. (Cité à la page 30)
- Van Nee, R.D.J., Sierveld, J., Fenton, P.C., et Townsend, B.R. The Multipath Estimating Delay Lock Loop : Approaching Theoretical Accuracy Limits. Dans *Proc. IEEE Symp. Position, Location and Navigation*, pages 246–251, Las Vegas, NV, April 1994. (Cité à la page 30)
- Viandier, N., Nahimana, D. F., Marais, J., et Duflos, E. GNSS Performance Enhancement in Urban Environment Based on Pseudo-range Error Model. Dans *Proc. Symp. of the IEEE/ION Position, Location and Navigation*, pages 377–382, Monterey, CA, May 2008. (Cité aux pages 30, 104, et 128)
- Yun, Youngsun, Yun, Ho, Kim, Doyoon, et Kee, Changdon. A Gaussian Sum Filter Approach for DGNSS Integrity Monitoring. *The Journal of Navigation*, 61(4), p. 687–703, 2008. (Cité à la page 30)

- Zair, Salim, Le Hégarat-Masclé, Sylvie, et Seignez, Emmanuel. Outlier Detection in GNSS Pseudo-Range/Doppler Measurements for Robust Localization. *Sensors*, 16(4), p. 580, 2016. (Cité aux pages 30 et 35)
- Zhang, Jianjun. *Precise Velocity and Acceleration Determination Using a Standalone GPS Receiver in Real Time*. PhD thesis, Royal Melbourne Institute of Technology, Melbourne, Australia, March 2007. (Cité aux pages 28 et 138)
- Zhang, Zhihua, Chen, Chibiao, Sun, Jian, et Chan, Kap Luk. EM Algorithms for Gaussian Mixtures with Split-and-Merge Operation. *Pattern Recognition*, 36(9), p. 1973–1983, Sept. 2003. (Cité aux pages 128, 173, et 174)